

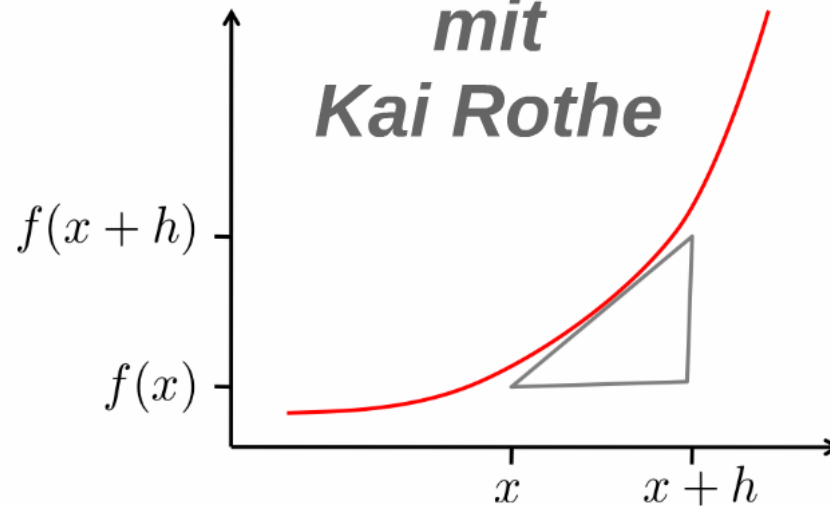
# Analysis I

Winter 2016/17

**Jörn Behrens**

*mit*

**Kai Rothe**



Newton-Verfahren, Kurven 

Buch Kapitel 2.11 und 2.12

## Lehre braucht Feedback!

<https://checking.tuhh.de/ce/c2b785bd/de.html>



- Bitte bewerten Sie jetzt meine Lehrveranstaltung online
- Teilnahme ist auch später möglich
- Die Eingabe und Auswertung ihrer Angaben ist vollkommen anonym
- Bei Fragen wenden Sie sich an: [evaluation@tuhh.de](mailto:evaluation@tuhh.de)

## Vielen Dank für Ihre Teilnahme!

# Erinnerung: Fixpunktiteration

**Idee:** Durch die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die definiert ist durch

$$x_0 \in I, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

ist im Falle der Konvergenz bei stetiger Funktion  $f$  ein Fixpunkt gegeben.  
Die Folge heißt dann eine **Fixpunkt-Folge**.

**Satz:** (Bannachscher Fixpunktsatz in  $\mathbb{R}$ )

Sei  $f : I \rightarrow I$  eine Funktion die  $I \subset \mathbb{R}$  in sich abbildet. Weiter gelte für alle  $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

mit einer von  $x, y$  unabhängigen Konstanten  $0 < K < 1$ . Dann hat  $f$  genau einen Fixpunkt  $\bar{x} \in I$  und die durch  $x_{n+1} = f(x_n)$  definierte Iterationsfolge  $(x_n)$  konvergiert für jeden beliebigen Anfangspunkt  $x_0 \in I$  gegen diesen Fixpunkt.



**Idee:** Durch die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die definiert ist durch

$$x_0 \in I, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

ist im Falle der Konvergenz bei stetiger Funktion  $f$  ein Fixpunkt gegeben. Die Folge heißt dann eine **Fixpunkt-Folge**.

**Satz:** (Bannachscher Fixpunktsatz in  $\mathbb{R}$ )

Sei  $f : I \rightarrow I$  eine Funktion die  $I \subset \mathbb{R}$  in sich abbildet. Weiter gelte für alle  $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

mit einer von  $x, y$  unabhängigen Konstanten  $0 < K < 1$ . Dann hat  $f$  genau einen Fixpunkt  $\bar{x} \in I$  und die durch  $x_{n+1} = f(x_n)$  definierte Iterationsfolge  $(x_n)$  konvergiert für jeden beliebigen Anfangspunkt  $x_0 \in I$  gegen diesen Fixpunkt.



# Idee Newton-Verfahren

**Beobachtung:** Die Fixpunkt-Iteration benötigt zwei wichtige Voraussetzungen:

1.  $f: I \rightarrow I$ ,
2.  $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$  mit  $|K| < 1$ ,  $x, y \in I$ .

**Frage:** Was können wir tun, wenn diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind?

**Idee:** Nach der Taylor-Formel ist die Tangente für  $x$  in der Nähe einer Nullstelle  $\bar{x}$

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

eine gute (erste) Näherung an die Funktion. Ein Algorithmus könnte also aus folgenden Schritten bestehen:

1. Wähle  $x_0$  in der Nähe von  $\bar{x}$ .
2. Berechne Schnittpunkt der Tangente  $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  mit  $x$ -Achse.
3. Wähle diesen Wert als neues  $x_1$  und fahre fort.

**Iteration:** Setze also

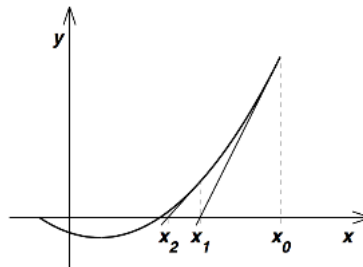
$$g(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Dabei muss  $f'(x) \neq 0$  gelten.

**Allgemein:** Definiere Iteration (Newton-Folge)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**Frage:** Unter welchen Bedingungen konvergiert die Newton-Folge?



# N

**Satz:** (I)

Sei  $f$  :  
zweimal  
existiere

**Beobachtung:** Die Fixpunkt-Iteration benötigt zwei wichtige Voraussetzungen:

1.  $f : I \rightarrow I,$

2.  $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$  mit  $|K| < 1, x, y \in I.$

**Frage:** Was können wir tun, wenn diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind?

**Idee:** Nach der Taylor-Formel ist die Tangente für  $x$  in der Nähe einer Nullstelle  $\bar{x}$

$$g(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

eine gute (erste) Näherung an die Funktion. Ein Algorithmus könnte also aus folgenden Schritten bestehen:

1. Wähle  $x_0$  in der Nähe von  $\bar{x}$ ,
2. Berechne Schnittpunkt der Tangente  $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  mit  $x$ -Achse.
3. Wähle diesen Wert als neues  $x_1$  und fahre fort.

**Iteration:** Setze also

$$g(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

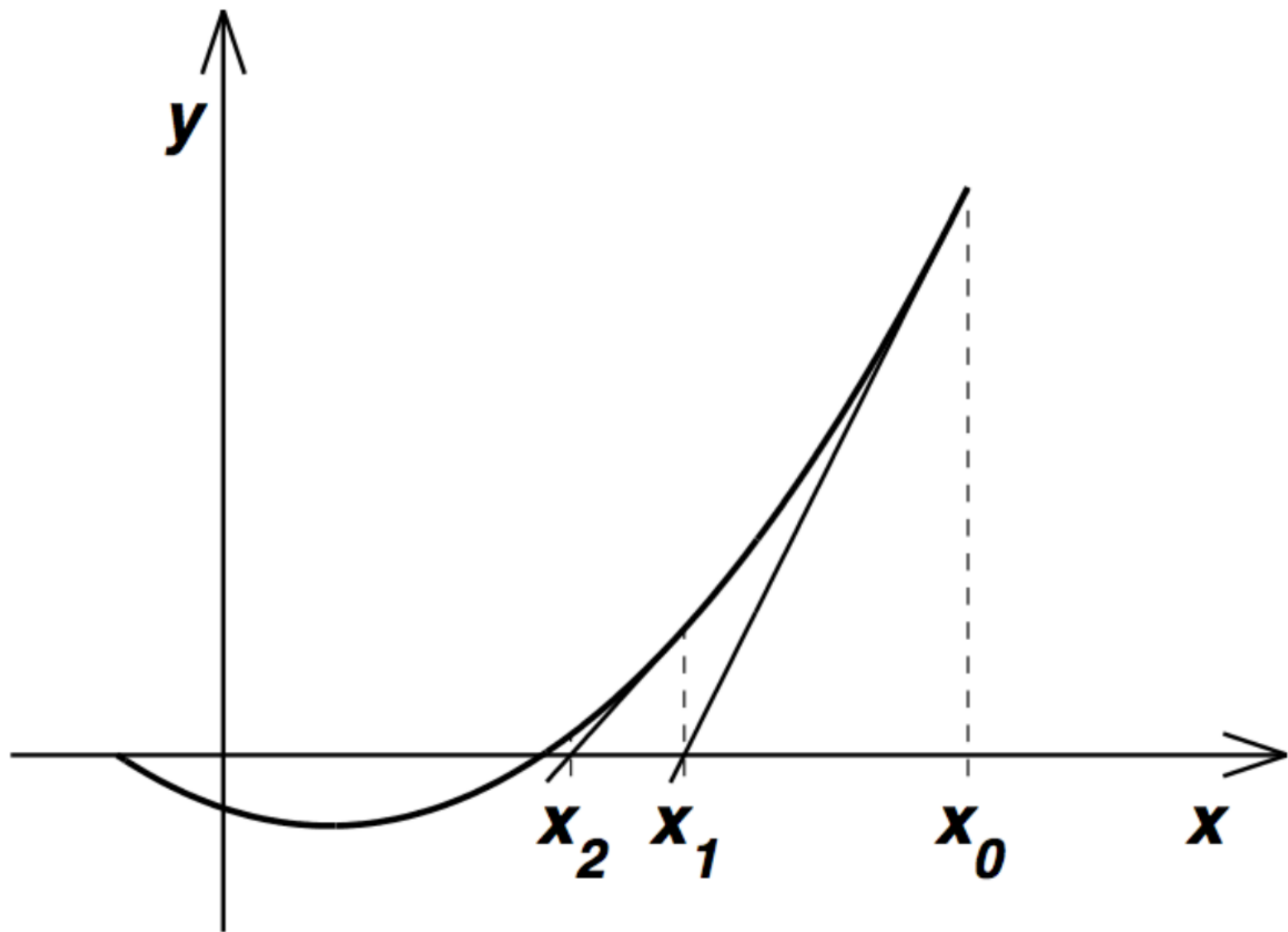
Dabei muss  $f'(x) \neq 0$  gelten.

**Allgemein:** Definiere Iteration (**Newton-Folge**)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**Frage:** Unter welchen Bedingungen konvergiert die Newton-Folge?





# Newton-Verfahren

**Satz:** (Newton-Verfahren)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf einem Intervall  $I \supset [x_0 - r, x_0 + r]$  ( $r > 0$ ) definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion mit  $f'(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$ . Weiterhin existiere  $K \in \mathbb{R}$ ,  $0 < K < 1$  mit

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq K \quad \text{für alle } x \in I$$

und

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq (1 - K)r.$$

Dann hat  $f$  genau eine Nullstelle  $\bar{x}$  in  $I$  und die Newton-Folge konvergiert quadratisch gegen  $\bar{x}$ , d.h. es gilt

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C(x_n - \bar{x})^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

mit einer Konstanten  $C \in \mathbb{R}$ . Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{M} \quad \text{mit } 0 < M = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$



Beweisidee:

- Definiere Hilfsfunktion  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
- Definiere Iterationsfolge  $x_{n+1} = g(x_n)$
- Wende auf die Iterationsfolge den Banachschen Fixpunktsatz an.

Bemerkungen:

- Newton-Verfahren funktioniert, wenn  $x_0$  nah genug an  $\bar{x}$  liegt, denn dann ist  $|f'(x_0)|$  klein und  $r > 0$  und  $K > 0$  können existieren.
- Quadratische Konvergenz bedeutet, dass der Approximationsfehler sich in jedem Schritt quadriert (Beschleunigung der Konvergenz).
- Ein gutes  $x_0$  findet man in der Praxis häufig durch Ausprobieren...
- Das Verfahren kann verbessert werden, so dass für (fast) beliebige Startwerte Konvergenz erzielt werden kann (gedämpftes Newton-Verfahren).

## Satz: (Newton-Verfahren)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf einem Intervall  $I \supset [x_0 - r, x_0 + r]$  ( $r > 0$ ) definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion mit  $f'(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$ . Weiterhin existiere  $K \in \mathbb{R}$ ,  $0 < K < 1$  mit

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq K \quad \text{für alle } x \in I$$

und

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq (1 - K)r.$$

Dann hat  $f$  genau eine Nullstelle  $\bar{x}$  in  $I$  und die Newton-Folge konvergiert quadratisch gegen  $\bar{x}$ , d.h. es gilt

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C(x_n - \bar{x})^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

mit einer Konstanten  $C \in \mathbb{R}$ . Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{M} \quad \text{mit } 0 < M = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$

## Beweisidee:

- Definiere Hilfsfunktion  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
- Definiere Iterationsfolge  $x_{n+1} = g(x_n)$
- Wende auf die Iterationsfolge den Bannachschen Fixpunktsatz an.

## Bemerkungen:

- Newton-Verfahren funktioniert, wenn  $x_0$  nah genug an  $\bar{x}$  liegt, denn dann ist  $|f(x_0)|$  klein und  $r > 0$  und  $K > 0$  können existieren.
- Quadratische Konvergenz bedeutet, dass der Approximationsfehler sich in jedem Schritt quadriert (Beschleunigung der Konvergenz!).
- Ein gutes  $x_0$  findet man in der Praxis häufig durch *ausprobieren...*
- Das Verfahren kann verbessert werden, so dass für (fast) beliebige Startwerte Konvergenz erzielt werden kann (gedämpftes Newton-Verfahren).

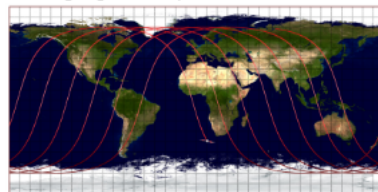
# Kurven

## Motivation

Anwendungen von Kurven:

- Satelliten-Bahnen
- Flug-Kurven
- Teilchen-Bahnen
- Bewegung von Körpern

Hier:  
Beschränkung auf  $\mathbb{R}^2$ !



## Definition

**Definition:** (Kurve in  $\mathbb{R}^2$ )  
Sei  $\gamma: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein abgeschlossenes Intervall, oder Abbildung

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen  $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\gamma_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Kurvenstück in  $\mathbb{R}^2$ .

- Anfangspunkt  $\gamma(a) = (\gamma_1(a), \gamma_2(a))$
- Endpunkt  $\gamma(b) = (\gamma_1(b), \gamma_2(b))$
- Spur  $\gamma([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^2$

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem  $\mathbb{R}^2$  werden Spaltenvektoren verwendet

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = (\gamma_1, \gamma_2)^T$$

Ein Kurvenstück heißt **regulär**, wenn für alle  $s \in [a, b]$  gilt:

$$(\dot{\gamma}_1(s))^2 + (\dot{\gamma}_2(s))^2 > 0$$

Für **Parametrisierung** des Kurvenstücks mit dem Parameter  $t$  ist geeignet durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$$

Durch wachsende Werte des Parameters  $s$  für das Kurvenstück wird die **Orientierung** gegeben.

Eine Annäherung von Kurvenstücken  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ), wobei der Anfangspunkt von  $\gamma_2$  der Endpunkt von  $\gamma_1$  ( $t = a_2 = a_1$ ) entspricht, heißt **Kurve**.

Es ist ein Kurvenstück vorhanden, wenn für sich auch die Kurve bezeichnet.

## Bogenlänge einer Kurve

**Satz:** Die Länge der Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist durch

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\dot{\gamma}_1(t))^2 + (\dot{\gamma}_2(t))^2} dt$$

beschrieben. Hier ist  $\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t))$  die Ableitung der Kurve  $\gamma$  an der Stelle  $t$ .

Die Kurve  $\gamma$  ist **regulär**, wenn für alle  $t \in [a, b]$  gilt:

$$(\dot{\gamma}_1(t))^2 + (\dot{\gamma}_2(t))^2 > 0$$

Die Kurve  $\gamma$  ist **stückweise regulär**, wenn für alle  $t \in [a, b]$  gilt:

$$(\dot{\gamma}_1(t))^2 + (\dot{\gamma}_2(t))^2 > 0$$

**Bogenlänge (Eigen)element**

$$ds = \sqrt{(\dot{\gamma}_1(t))^2 + (\dot{\gamma}_2(t))^2} dt$$

heißt **Differential der Bogenlänge** (oder Bogenlängenelement), wobei die Distanz  $ds$  von zwei benachbarten Variablen  $t$  ist.



## Kurventangente

**Tangente:** Zur Parametrisierung  $\gamma(t)$  einer Kurve kann man definieren

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix}$$

Das bezeichnet  $\dot{\gamma}(t)$  die Ableitung von  $\gamma(t)$ , wenn  $t$  die Zeit ist.

**Definition:**  $\dot{\gamma}(t)$  heißt **Tangentenvektor** der Kurve  $\gamma(t)$  im Punkt  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ .

Die Tangente an der Stelle  $t$  ist die Gerade durch  $\gamma(t)$  mit dem Richtungsvektor  $\dot{\gamma}(t)$ .

$$T(t) = \gamma(t) + \lambda \dot{\gamma}(t)$$

Die Tangente an der Stelle  $t$  ist die Gerade durch  $\gamma(t)$  mit dem Richtungsvektor  $\dot{\gamma}(t)$ .

$$T(t) = \gamma(t) + \lambda \dot{\gamma}(t)$$

Die Tangente an der Stelle  $t$  ist die Gerade durch  $\gamma(t)$  mit dem Richtungsvektor  $\dot{\gamma}(t)$ .

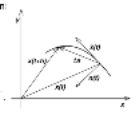
$$T(t) = \gamma(t) + \lambda \dot{\gamma}(t)$$

Die Tangente an der Stelle  $t$  ist die Gerade durch  $\gamma(t)$  mit dem Richtungsvektor  $\dot{\gamma}(t)$ .

$$T(t) = \gamma(t) + \lambda \dot{\gamma}(t)$$

Die Tangente an der Stelle  $t$  ist die Gerade durch  $\gamma(t)$  mit dem Richtungsvektor  $\dot{\gamma}(t)$ .

$$T(t) = \gamma(t) + \lambda \dot{\gamma}(t)$$

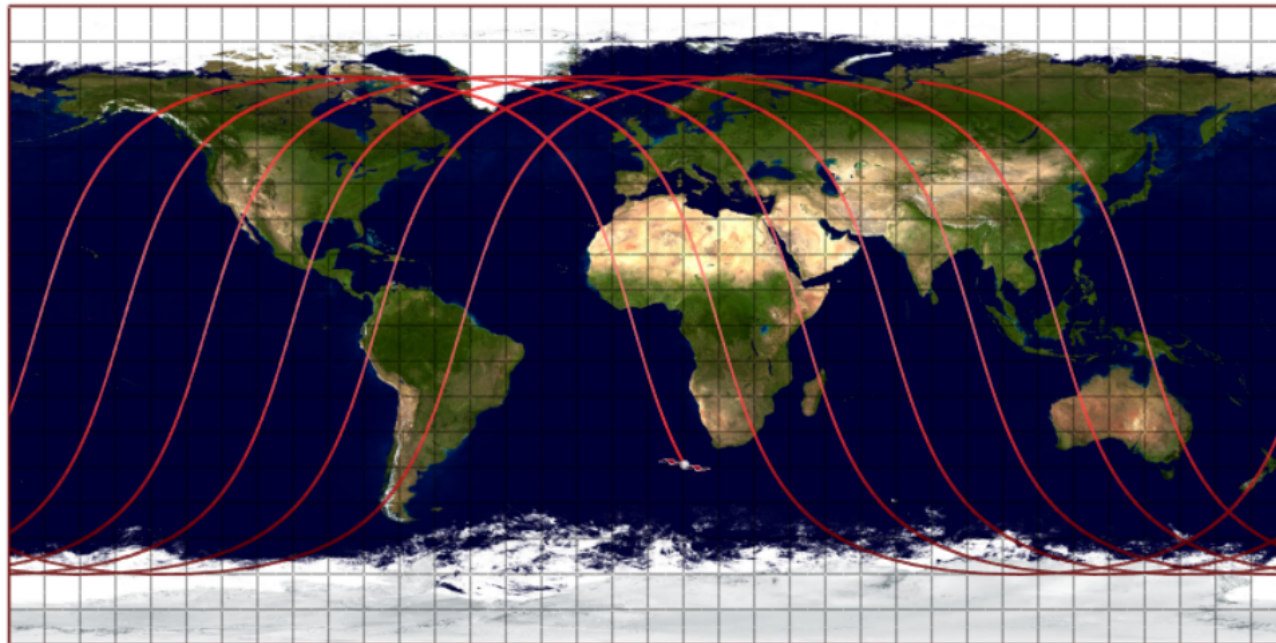


# Motivation

Anwendungen von Kurven:

- Satelliten-Bahnen
- Flug-Kurven
- Teilchen-Bahnen
- Bewegung von Körpern

**Hier:**  
Beschränkung auf  $\mathbb{R}^2$ !



# Definition

**Definition:** (Kurve im  $\mathbb{R}^2$ )

Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  und  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung

$$\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen  $x_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Kurvenstück** in  $G$  mit

- **Anfangspunkt**  $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a))^\top$ ,
- **Endpunkt**  $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b))^\top$ ,
- **Spur**  $\{\mathbf{x}(t) | a \leq t \leq b\}$ .

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem  $\mathbb{R}^2$  werden Spaltenvektoren verwendet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^\top.$$

Ein Kurvenstück heißt **regulär**, wenn für alle  $t \in [a, b]$  gilt:

$$(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 > 0.$$

Eine **Parameterdarstellung** des Kurvenstücks mit dem Parameter  $t$  ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Durch wachsende Werte des Parameters  $t$  ist für das Kurvenstück eine **Orientierung** gegeben.

Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken  $K_i$  ( $i = 1 : r$ ), wobei der Anfangspunkt von  $K_i$  dem Endpunkt von  $K_{i-1}$  ( $i = 2 : r$ ) entspricht, heißt **Kurve**.

Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es oft auch als Kurve bezeichnet.

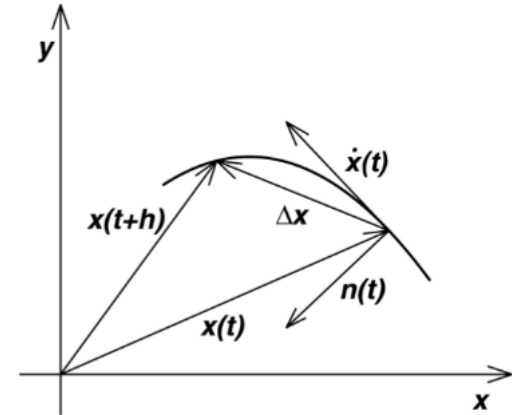
# Kurv tangenten

**Tangente:** Zur Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(t)$  einer Kurve kann man definieren:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnet  $\dot{x}(t)$  die Ableitung von  $x(t)$ , wenn  $t$  die Zeit ist.

**Definition:**  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  heißt **Tangentenvektor** der Kurve  $\mathbf{x}(t)$  im Punkt  $(x(t), y(t))^T$ .



**Bemerkungen:**

- Für die Tangente  $T$  in  $(x(t_0), y(t_0))^T$  ergibt sich mit dem Anstieg  $\tan \alpha = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$  die Gleichung

$$y = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0)). \quad \textcircled{1}$$

- Die Normale  $N$  in  $(x(t_0), y(t_0))^T$  steht senkrecht auf  $T$ , hat also den Anstieg

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}.$$

Die Gleichung für die Normale lautet also

$$y = y(t_0) - \frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}(x - x(t_0)).$$

- Einen **Normalenvektor**  $\mathbf{n}(t_0)$  in  $(x(t_0), y(t_0))^T$ , d.h.  $\mathbf{n}(t_0)$  steht senkrecht auf  $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$ , erhält man durch

$$\mathbf{n}(t_0) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}.$$



## Bemerkungen:

- Für die Tangente  $T$  in  $(x(t_0), y(t_0))^\top$  ergibt sich mit dem Anstieg  $\tan \alpha = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$  die Gleichung

$$y = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0)).$$

1

- Die Normale  $N$  in  $(x(t_0), y(t_0))^\top$  steht senkrecht auf  $T$ , hat also den Anstieg

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}.$$

Die Gleichung für die Normale lautet also

$$y = y(t_0) - \frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}(x - x(t_0)).$$

- Einen **Normalenvektor**  $\mathbf{n}(t_0)$  in  $(x(t_0), y(t_0))^\top$ , d.h.  $\mathbf{n}(t_0)$  steht senkrecht auf  $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$ , erhält man durch

$$\mathbf{n}(t_0) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}.$$

# Bogenlänge einer Kurve

**Sekantenlänge:** Die Länge der Sekante  $c = \mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)$  ist nach *Pythagoras*:

$$c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x(t+h) - x(t))^2 + (y(t+h) - y(t))^2}$$

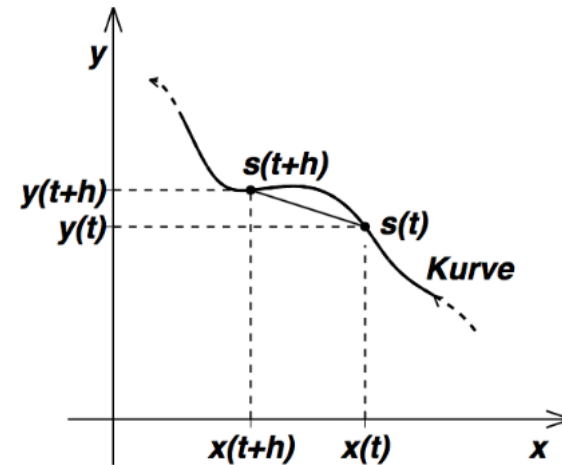
**Bogenlänge:** Die Länge des Kurvenbogens  $\Delta s$  vom Punkt  $\mathbf{x}(t+h)$  bis  $\mathbf{x}(t)$  ist für kleines  $h$  etwa gleich der Sekantenlänge:  $c \approx \Delta s$  ( $h \rightarrow 0$ ).

Andererseits ist die Bogenlänge auch die Differenz der Kurvenlänge  $s(t+h)$  und  $s(t)$ . Also bildet man

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \sqrt{\left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right)^2 + \left(\frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right)^2}$$

Für  $x(t)$  und  $y(t)$  differenzierbar (z.B. reguläre Kurven) lässt sich schreiben

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$$



2

**Bogenlänge:** (Bogendifferential)

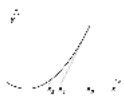
$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

heißt **Differential der Bogenlänge** (oder Bogenelement), wobei  $dt$  das Differential der unabhängigen Variablen  $t$  ist.

# Idee Newton-Verfahren

Bestimmung der Nullstellen einer (nicht)linearer  
 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2 = 0 \iff x = \pm \sqrt{2}$   
 Frage: Wie schnell konvergiert das Newton-Verfahren?

**Merkmale:**  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  (D: reelles Intervall)  
 $f$  ist stetig und differenzierbar  
 $f'(x) \neq 0$  für alle  $x \in D$   
 $f$  ist zweimal stetig differenzierbar  
 $f''$  ist beschränkt  
 $f$  hat eine Nullstelle  $\xi$   
 $f(\xi) = 0$   
 $f'(\xi) \neq 0$   
 $f''$  ist beschränkt  
 $f''(x) \leq M$  für alle  $x \in D$   
 $f''(x) \geq m$  für alle  $x \in D$



# Erinnerung: Fixpunktiteration

**Idee:** Durch die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die definiert ist durch  
 $x_0 \in I, x_{n+1} = f(x_n), n = 0, 1, \dots$

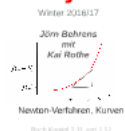
ist im Falle der Konvergenz bei stetiger Funktion  $f$  ein Fixpunkt gegeben.  
 Die Folge heißt dann eine **Fixpunkt-Folge**.

**Satz:** (Banachscher Fixpunktsatz in  $\mathbb{R}$ )

Sei  $f: I \rightarrow I$  eine Funktion auf die  $I \subset \mathbb{R}$  in sich abbildet. Weiter gelte für alle  $x, y \in I$   
 $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$

mit einem stetig wählbaren Konstanten  $0 < K < 1$ . Dann besitzt genau  
 einen Fixpunkt  $\xi \in I$  und die durch  $x_{n+1} = f(x_n)$  definierte Iterationsfolge  $(x_n)$   
 konvergiert für jeden beliebigen Anfangswert  $x_0 \in I$  gegen diesen Fixpunkt.

# Analysis I



# Newton-Verfahren

**Satz:** (Newton-Verfahren)

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf einem Intervall  $I \subset ]x_0 - r, x_0 + r[$  ( $r > 0$ ) definierte,  
 zweimal stetig differenzierbare Funktion mit  $f'(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$ . Weiterhin  
 gelte  $K < \infty, M < \infty, m < \infty$  mit

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^3} \right| \leq K \text{ für alle } x \in I$$

und

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq (1 - K)r$$

Dann hat  $f$  genau eine Nullstelle  $\xi$  in  $I$  und die Newton-Folge konvergiert quadratisch  
 gegen  $\xi$ , d.h. es gilt

$$|x_{n+1} - \xi| \leq C|x_n - \xi|^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

mit einer Konstanten  $C < \infty$ . Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \xi| \leq \frac{M}{M - m} \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \quad \text{mit } 0 < M = \max_{x \in I} |f''(x)|$$

**Beispiel:**  
 Bestimmung der Nullstelle  $\xi$  von  $f(x) = x^2 - 2$   
 mit dem Newton-Verfahren  
 (siehe auch Beispiel 1.1.10 in [1])  
 Die Funktion  $f(x) = x^2 - 2$  ist zweimal stetig differenzierbar und  
 es gilt  $f'(x) = 2x \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .  
 Die Funktion  $f$  hat die Nullstelle  $\xi = \sqrt{2}$ .

# Kurven

**Motivation**

- Anwendungen von Kurven:
  - Geometrische Beweise
  - Physik
  - Technische Zeichnung
  - Beziehung von Kurven

**Zusammenhang einer Kurve**

**Definition**

Sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve in  $\mathbb{R}^n$ .  
 Dann heißt  $\gamma'(t)$  die **Wegableitung** von  $\gamma$  an der Stelle  $t$ .  
 Die **Wegableitung**  $\gamma'(t)$  ist ein Vektor in  $\mathbb{R}^n$ .  
 Die **Wegableitung**  $\gamma'(t)$  ist ein Vektor in  $\mathbb{R}^n$ .  
 Die **Wegableitung**  $\gamma'(t)$  ist ein Vektor in  $\mathbb{R}^n$ .

**Kurventangente**

Die **Kurventangente** an der Stelle  $t$  ist die Gerade durch  $\gamma(t)$  mit der Richtungsvektor  $\gamma'(t)$ .  
 Die **Kurventangente** an der Stelle  $t$  ist die Gerade durch  $\gamma(t)$  mit der Richtungsvektor  $\gamma'(t)$ .