

Analysis I Winter 2016/17 - Vorlesung am 17./19.01.2017

Newton-Iteration

Jörn Behrens (<http://www.clisap.de/behrens>) (joern.behrens@uni-hamburg.de)
(<mailto:joern.behrens@uni-hamburg.de>)

Einführung

Das Newton-Verfahren ist gegeben als eine Iteration für die Berechnung der Nullstelle einer Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Die Iterationsvorschrift lautet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei von einem Startwert x_0 in der Nähe der Nullstelle ausgegangen wird.

Gleichung

Betrachte das Polynom

$$p_3(x) = \frac{1}{4}x^3 - x + \frac{1}{5}.$$

Newton-Iteration

Wir wollen die Nullstellen des Polynoms mit Hilfe der Newton-Iteration berechnen, dazu leiten wir her:

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 1,$$

womit sich für die konkrete Newton-Iteration ergibt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{4}x_n^3 - x_n + \frac{1}{5}}{\frac{3}{4}x_n^2 - 1}.$$

Die rechte Seite der Iterationsvorschrift definieren wir als Funktion "Newton":

```
In [1]: from numpy import linspace, zeros, size
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

def Newton(x):
    y= x-(0.25*x**3 - x + 0.2)/(0.75*x*x- 1)
    return y
```

Nun starten wir vom Anfangswert $x_0 = \frac{1}{2}$ und führen die erste Iteration durch.

```
In [2]: iter=10
xx=zeros(iter)
xx[0]= 0.5
xx[1]=Newton(xx[0])
s = 'Iteration: '+repr(1)+'', x-value: '+repr(xx[1])
print(s)
```

```
Iteration: 1, x-value: 0.16923076923076924
```

Jetzt wiederholen wir diese Prozedur in einer Schleife.

```
In [3]: for k in range(iter-1):
        xx[k+1]=Newton(xx[k])
        s = 'Iteration: '+repr(k+1)+'', x-value: '+repr(xx[k+1])
        print(s)
```

```
Iteration: 1, x-value: 0.16923076923076924
Iteration: 2, x-value: 0.20191365748601042
Iteration: 3, x-value: 0.20206251229970926
Iteration: 4, x-value: 0.20206251576202167
Iteration: 5, x-value: 0.20206251576202164
Iteration: 6, x-value: 0.20206251576202164
Iteration: 7, x-value: 0.20206251576202164
Iteration: 8, x-value: 0.20206251576202164
Iteration: 9, x-value: 0.20206251576202164
```

Wir sehen, dass in der 4. Iteration schon 16 Nachkommastellen unverändert bleiben.

```
In [ ]:
```