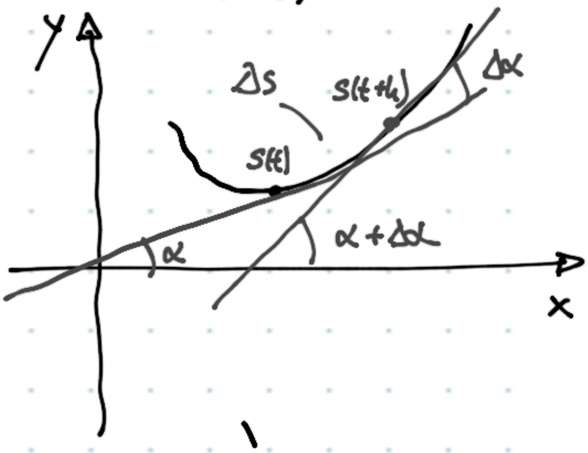
Analysis I

J. Behrens

24.01.2017

① zu zeigen $$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^3}}$$

Für $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ gilt: $\tan \alpha(t) = \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$



Differenziation beider Seiten ergibt:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{[\dot{x}(t)]^2}\frac{dt}{ds} \quad (*)$$

Nun ist $$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2} = \frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \quad (**)$$

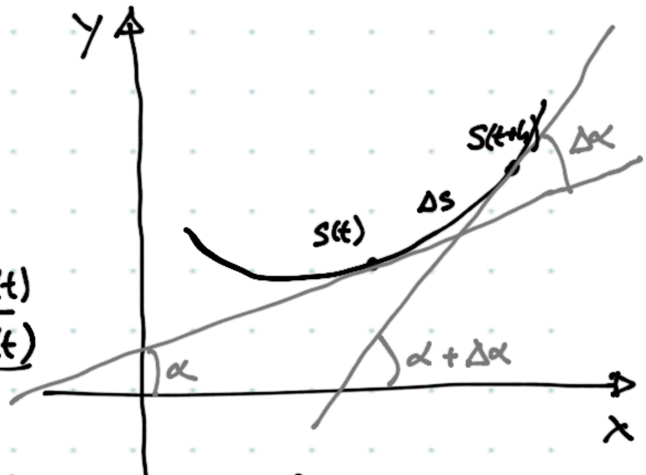
und $$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \quad (***)$$

(*) mit (**) + (***)

$$\Rightarrow \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{3}{2}}} \qquad \boxtimes$$

Analysis I

26.01.2017



① z.z.: $$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot x(t)\ddot y(t) - \dot y(t)\ddot x(t)}{\sqrt{\left(\dot x^2(t) + \dot y^2(t)\right)^3}}$$

Für $\vec x(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ gilt: $\underbrace{\tan\alpha(t) = \frac{\dot y(t)}{\dot x(t)}}_{(*)}$

Differentiation (*) nach s (auf beiden Seiten):

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}\,\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot x(t)\ddot y(t) - \dot y(t)\ddot x(t)}{[\dot x(t)]^2}\,\frac{dt}{ds} \qquad (1)$$

Nun ist: $$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\left(\frac{\dot y}{\dot x}\right)^2} = \frac{\dot x^2}{\dot x^2 + \dot y^2} \qquad (2)$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}} \qquad (3)$$

Setze (2) und (3) in (1) ein:

$$\Rightarrow \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot x(t)\ddot y(t) - \dot y(t)\ddot x(t)}{\sqrt{\left(\dot x^2(t) + \dot y^2(t)\right)^3}} \qquad \boxtimes$$