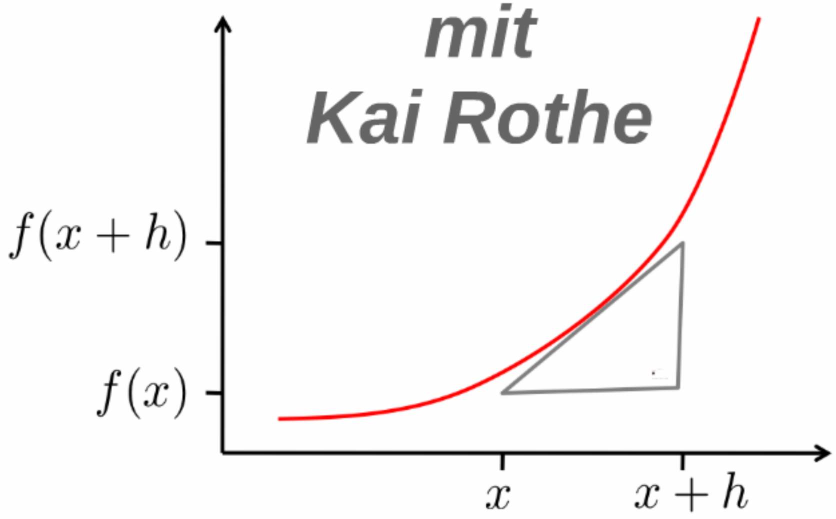
Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe



Komplexe Zahlen

Buch Kapitel 1.7

Wiederholung: Komplexe Zahlen

Motivation

Erinnerung:

- $\mathbb{Z}$: Die Gleichung $n + x = m$ lösbar für alle $n, m \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q}$: Die Gleichung $n \cdot x = m$ lösbar für alle $n, m \in \mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$: Die Gleichung $x \cdot x = q$ lösbar für alle $q \in \mathbb{R}$

Problem: $x^2 + px + q = 0$ ist nicht lösbar für beliebige $p, q \in \mathbb{R}$!

Denn: Verwende pq-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Formel ist nicht lösbar für $\frac{p^2}{4} - q < 0$!

Definition

Idee: Führe Zahlenraum ein, der $\sqrt{-1}$ enthält.

Definition.

1. Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$: $z := a + b \cdot i$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.
   a heißt *Realteil* von z: $a =: Re\,z$,
   b heißt *Imaginärteil* von z: $b =: Im\,z$
2. Gleichheit: Für $z_1 = a_1 + b_1 i \in \mathbb{C}$ und $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ gelte:
   $$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2.$$
   Insbesondere $z = a + bi = 0$ falls $a = 0 \wedge b = 0$.
3. Konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$: zu $z = a + bi$ ist $\bar{z} = a - bi$.
4. Betrag $|z|$: zu $z = a + bi$ ist $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bemerkung: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ – denn $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : Im\,z = 0\}$

Rechenregeln

Addition/Subtraktion:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i$$

Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

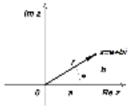
Division: (sei $z_2 = (a_2 + b_2 i) \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Polarkoordinaten

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

1. Punkt in Zahlenebene charakterisiert durch (r, ϕ)
2. r absoluter Betrag von z (Abstand vom Ursprung/Länge)
3. ϕ Argument von z (Winkel zur x-Achse)



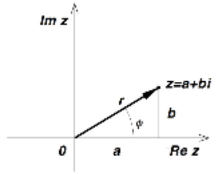
Bemerkungen:

- ϕ nur bis auf Vielfache von π bestimmt: Betrachte $\phi \in [-\pi, \pi]$
- Es gilt: $a = r \cos\phi$ und $b = r \sin\phi$
- Umgekehrt gilt: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ und $\tan\phi = \frac{b}{a}$, $(a \neq 0)$
- Falls $a = 0$:
  $$\phi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{falls } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{falls } b < 0 \end{cases}$$
- Falls $z = 0$, so ist $r = 0$ und ϕ unbestimmt

Gaußsche Zahlenebene

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

1. Führe in Ebene kartesisches Koordinatensystem (x, y) ein.
2. Trage $a = Re\,z$ auf der x-Achse auf.
3. Trage $b = Im\,z$ auf der y-Achse auf.



Motivation

Erinnerung:

- $\mathbb{Z}$: Die Gleichung $n + x = m$ lösbar für alle $n, m \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q}$: Die Gleichung $n \cdot x = m$ lösbar für alle $n, m \in \mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$: Die Gleichung $x \cdot x = q$ lösbar für alle $q \in \mathbb{R}$

Problem: $x^2 + px + q = 0$ ist nicht lösbar für beliebige $p, q \in \mathbb{R}$!

Denn: Verwende pq-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

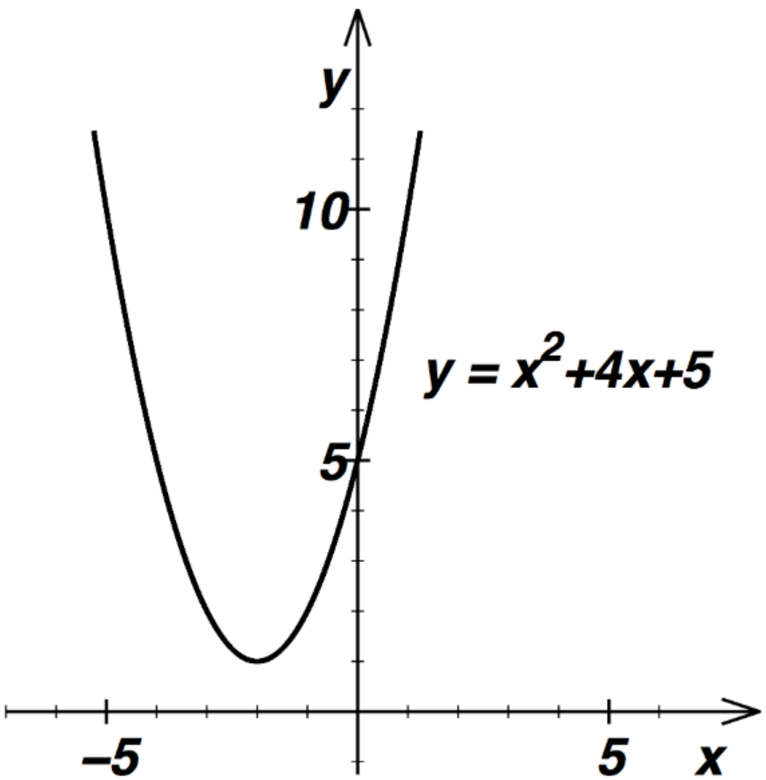
Formel ist nicht lösbar für $\frac{p^2}{4} - q < 0$!

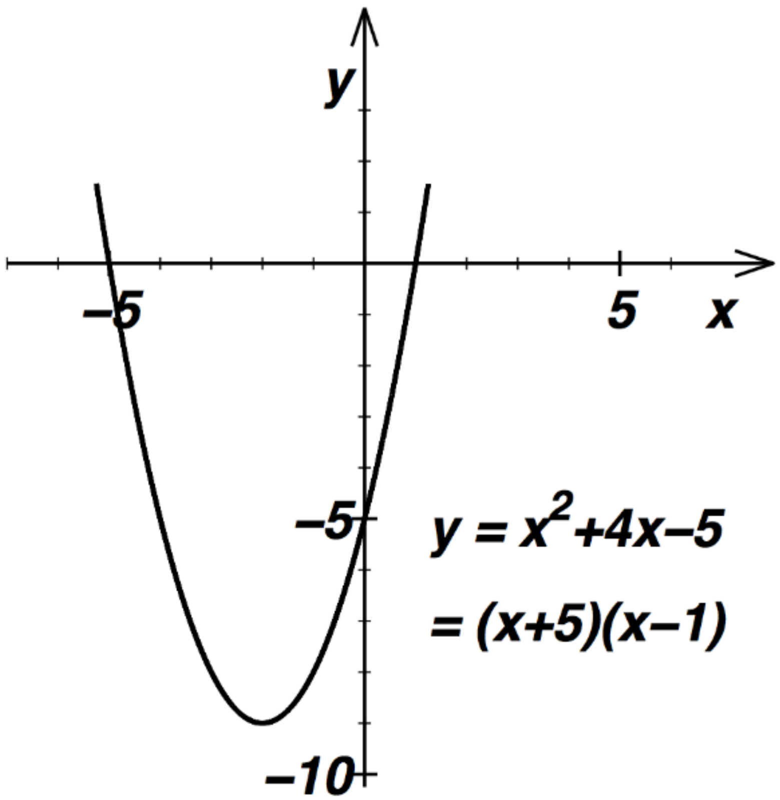
Beispiel:

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm \sqrt{-1}$$

Graphische Veranschaulichung:





Definition

Idee: Führe Zahlenraum ein, der $\sqrt{-1}$ enthält.

Definition:

1. Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$: $z := a + b \cdot i$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.
   a heißt *Realteil* von z: $a =: Rez$,
   b heißt *Imaginärteil* von z: $b =: Imz$

2. Gleichheit: Für $z_1 = a_1 + b_1 i \in \mathbb{C}$ und $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ gelte:

   $$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2.$$

   Insbesondere $z = a + bi = 0$ falls $a = 0 \wedge b = 0$.

3. Konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$: zu $z = a + bi$ ist $\bar{z} = a - bi$.

4. Betrag $|z|$: zu $z = a + bi$ ist $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bemerkung: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ – denn $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \ Imz = 0\}$

Rechenregeln

Addition/Subtraktion:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$$

Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Division: (sei $z_2 = (a_2 + b_2 i) \neq 0$)

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a_1 + b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \frac{z_1 \bar{z_2}}{|z_2|^2}\end{aligned}$$

Rechenregeln für komplex Konjugierte

Seien $z = a + bi$ und $\bar{z} = a - bi$. Dann gilt:

1. $z + \bar{z} = 2a$
2. $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

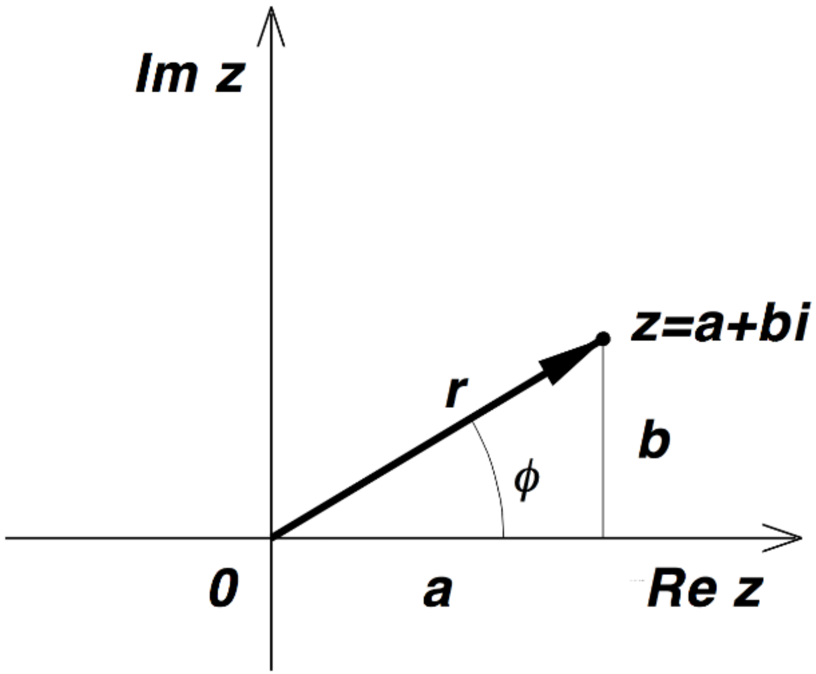
Seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

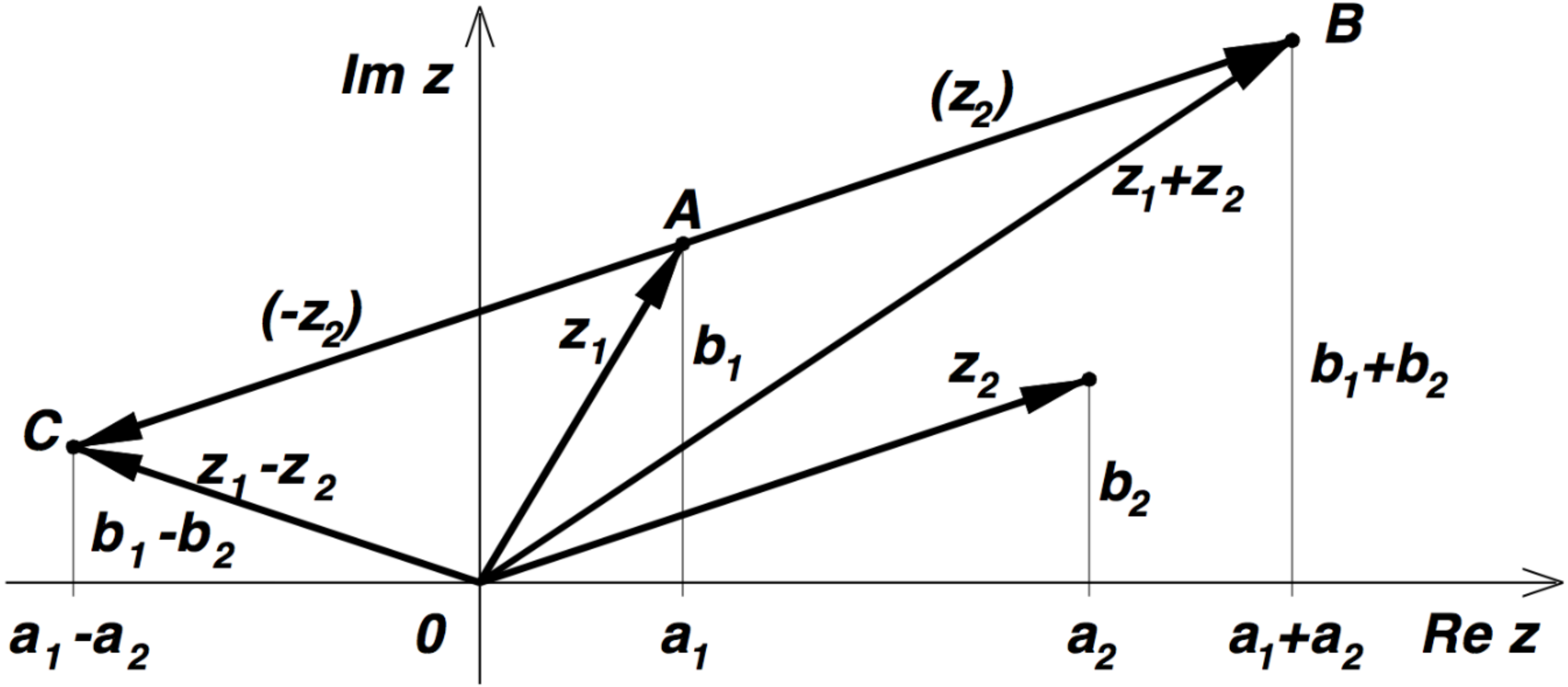
Gaußsche Zahlenebene

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

1. Führe in Ebene kartesisches Koordinatensystem (x, y) ein.
2. Trage $a = Re\ z$ auf der x-Achse auf.
3. Trage $b = Im\ z$ auf der y-Achse auf



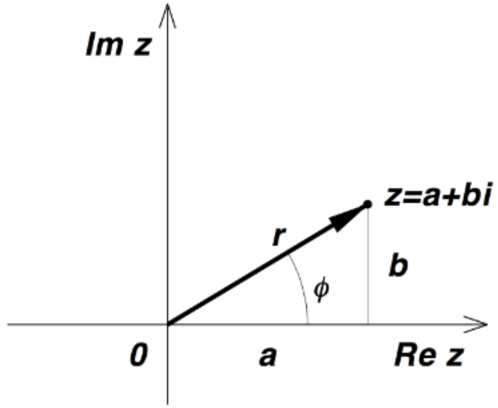
Addition/Subtraktion



Polarkoordinaten

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

1. Punkt in Zahlenebene charakterisiert durch (r, ϕ)
2. r absoluter Betrag von z (Abstand vom Ursprung/Länge)
3. ϕ Argument von z (Winkel zur x-Achse)



Bemerkungen:.

- ϕ nur bis auf Vielfache von π bestimmt: Betrachte $\phi \in]-\pi, \pi]$
- Es gilt: $a = r\cos\phi$ und $b = r\sin\phi$
- Umgekehrt gilt: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ und $\tan\phi = \frac{b}{a}$, $(a \neq 0)$
- Falls $a = 0$:
$$\phi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{falls } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{falls } b < 0 \end{cases}$$
- Falls $z = 0$, so ist $r = 0$ und ϕ unbestimmt

Rechenregeln in Polarkoordinaten

Allgemeine Darstellung in Polarkoordinaten:

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Seien $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ und $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$. Dann gilt:

- $z \cdot w = |z||w|(\cos(\phi + \psi) + i\sin(\phi + \psi))$
- $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\phi - \psi) + i\sin(\phi - \psi))$

(Addition: Übung)

Eulersche Formel

Sei $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$. Dann gilt:

$$z = |z|e^{i\phi}$$

mit der Eulerschen Formel $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$.

Körper und Analogie zu $\mathbb{R}^2$

Alternative Definition

Definition: (Komplexe Zahlen)

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist gegeben durch den (2-dimensionsalen) Raum $\mathbb{R}^2$ der reellen Zahlen mit Rechenregeln $+$ und $\cdot$:

$(+)$: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$,

$(\cdot)$: $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$.

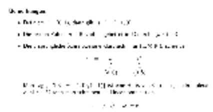
Zahlenkörper

Satz: $\mathbb{C}$ mit den (alternativ) definierten Operationen $(+)$ und $(\cdot)$ ist ein Körper, d.h. es gelten

$(+)$: Assoziativität, Kommutativität, Existenz des Nullelements und des Negativen,

$(\cdot)$: Assoziativität, Kommutativität, Existenz des Einselements und der Inversen,

$(+,\cdot)$: Distributivgesetz.



Betrag und Norm

Es gilt:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(Re\ z)^2 + (Im\ z)^2} = |(a,b)|_2,$$

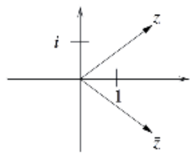
d.h. $|z|$ ist die (euklidische) Norm auf dem $\mathbb{R}^2$.
Damit gilt aber

- $|z| \in \mathbb{R}$, $|z| > 0$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung).

Konjugiert komplexe Zahl – revisited

Erinnerung: Zu $z = a + ib$ definiert $\bar{z} = a - ib$ die konjugiert komplex Zahl.

Geometrische Interpretation:



Es gelten:

- $|z| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $Re\ z = a = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
- $Im\ z = b = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

Weiter gelten:

- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|Re\ z| \leq |z|$
- $|Im\ z| \leq |z|$

Alternative Definition

Definition: (Komplexe Zahlen)

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist gegeben durch den (2-dimensionsalen) Raum $\mathbb{R}^2$ der reellen Zahlen mit Rechenregeln $+$ und $\cdot$:

(+): $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$,

(·): $(a_1, b_1) \ \cdot \ (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$.

Zahlenkörper

Satz: $\mathbb{C}$ mit den (alternativ) definierten Operationen $(+)$ und $(\cdot)$ ist ein Körper, d.h. es gelten

$(+)$: Assoziativität, Kommutativität, Existenz des Nullelements und des Negativen,

$(\cdot)$: Assoziativität, Kommutativität, Existenz des Einselements und der Inversen,

$(+, \cdot)$: Distributivgesetz.

1

Bemerkungen:

- Definiere $i = (0, 1)$, dann gilt: $i \cdot i = (-1, 0)$
- Die reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ sind eingebettet in $\mathbb{C}$ durch: $(a, 0) \in \mathbb{C}$.
- Die ursprüngliche Schreibweise erklärt sich: Für $(a, b) \in \mathbb{C}$ schreibe

$$\begin{array}{ccccc} z & = & a & + & ib \\ & & \updownarrow & & \updownarrow \\ & & (a,0) & & (0,b) \end{array}$$

Man sagt, $\{\mathbf{1}, i\} = \{(1,0), (0,1)\}$ ist eine Basis von $\mathbb{C}$, denn jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann man schreiben als Linearkombination

$$z = (a, b) = \mathbf{1}a + ib$$

Bemerkungen:

- Definiere $i = (0, 1)$, dann gilt: $i \cdot i = (-1, 0)$
- Die reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ sind eingebettet in $\mathbb{C}$ durch: $(a, 0) \in \mathbb{C}$.
- Die ursprüngliche Schreibweise erklärt sich: Für $(a, b) \in \mathbb{C}$ schreibe

$$\begin{array}{ccccc} z & = & a & + & ib \\ & & \updownarrow & & \updownarrow \\ & & (a,0) & & (0,b) \end{array}$$

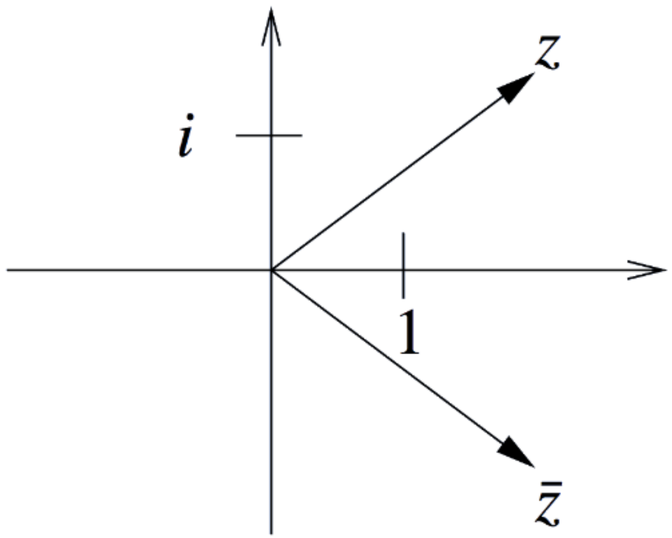
  Man sagt, $\{\mathbf{1}, i\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ ist eine Basis von $\mathbb{C}$, denn jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann man schreiben als Linearkombination

$$z = (a, b) = \mathbf{1}a + ib$$

Konjugiert komplexe Zahl – revisited

Erinnerung: Zu $z = a + ib$ definiert $\bar{z} = a - ib$ die konjugiert komplex Zahl.

Geometrische Interpretation:



Es gelten:

- $|z| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $Re\ z = a = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
- $Im\ z = b = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

2

Weiter gelten:

- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|Re\ z| \leq |z|$
- $|Im\ z| \leq |z|$

Betrag und Norm

Es gilt:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(Re\ z)^2 + (Im\ z)^2} = \|(a,b)\|_2,$$

d.h. $|z|$ ist die (euklidische) Norm auf dem $\mathbb{R}^2$.
Damit gilt aber

- $|z| \in \mathbb{R}$, $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0$,
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung).

Potenzen und Konvergenz in $\mathbb{C}$

Konvergenz

Bemerkung: Mit der Norm im $\mathbb{R}^2$ können wir die Konvergenz in $\mathbb{C}$ definieren:

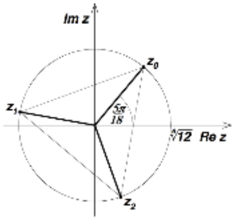
$$\begin{aligned} z_n \to z &\Leftrightarrow |z_n - z| \to 0 \\ &\Leftrightarrow ||z_n - z||_2 \to 0 \\ &\Leftrightarrow Re\ z_n \to Re\ z\ \wedge\ Im\ z_n \to Im\ z \end{aligned}$$

Potenz

Frage: Wie können wir in $\mathbb{C}$ Potenzen bilden (bzw. Wurzeln ziehen)?

3

$$z^3 = w = 3 + i\sqrt{3}$$



Potenzierung/Radizierung

Satz: (De Moivresche Formel)
Allgemein: Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

a) Die n-te Potenz von $z = a + ib = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = re^{i\phi}$ ergibt sich zu

$$z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)) = r^n e^{in\phi}.$$

Also gilt die De Moivresche Formel

$$(\cos\varphi + i\sin\phi)^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi).$$

b) Für jede komplexe Zahl $w = re^{i\phi} \neq 0$ hat die Gleichung $z^n = w$ genau n verschiedene Lösungen, nämlich die n n-ten Wurzeln

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\phi}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\phi}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right)},$$

$(k = 0 : n-1)$. Die n-ten Wurzeln liegen auf einem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{r}$ um den Nullpunkt der Gaußschen Zahlenebene und bilden ein regelmäßiges n-Eck.

Bemerkung: Ist ϕ der Hauptwert $Arg\ w$ von $arg\ w$ (gilt also $-\pi < \phi \leq \pi$), so nennt man z_0 den Hauptwert von $\sqrt[n]{z}$.

Konvergenz

Bemerkung: Mit der Norm im $\mathbb{R}^2$ können wir die Konvergenz in $\mathbb{C}$ definieren:

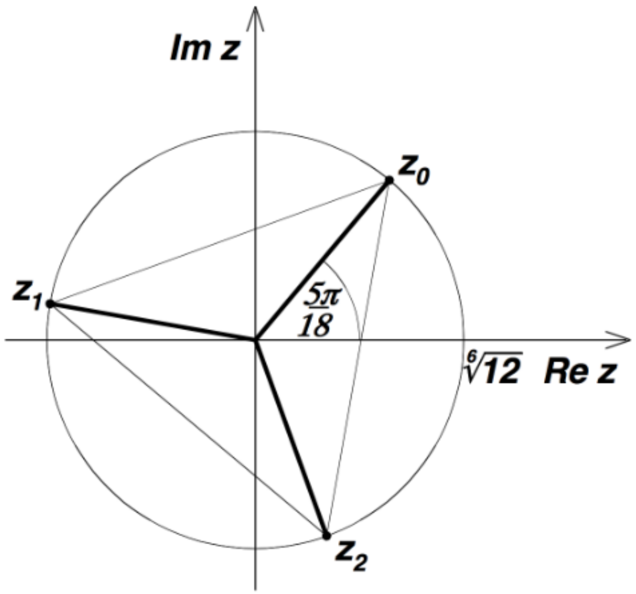
$$\begin{aligned} z_n \to z &\Leftrightarrow |z_n - z| \to 0 \\ &\Leftrightarrow \|z_n - z\|_2 \to 0 \\ &\Leftrightarrow Re\ z_n \to Re\ z\ \wedge\ Im\ z_n \to Im\ z \end{aligned}$$

Potenz

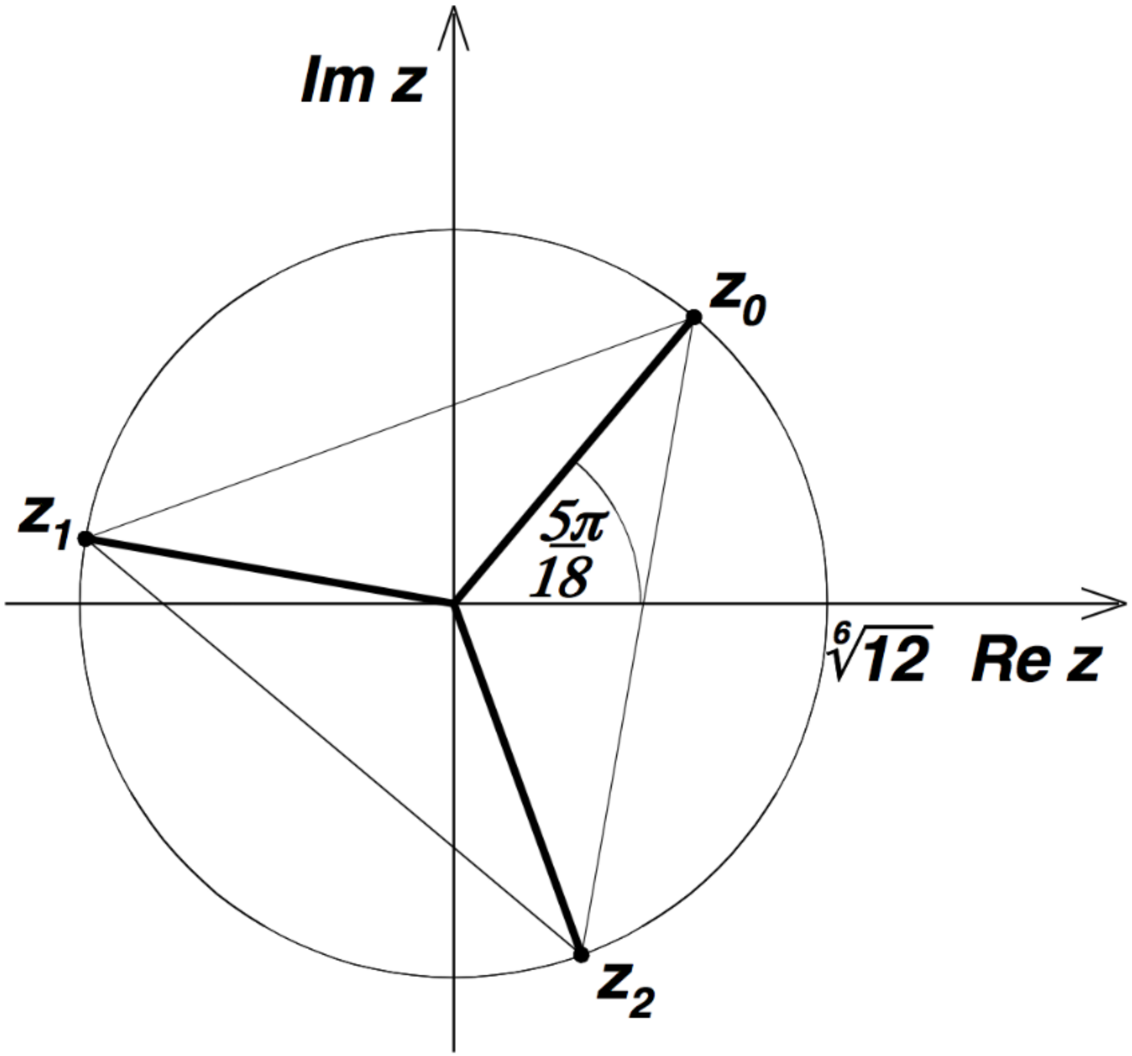
Frage: Wie können wir in $\mathbb{C}$ Potenzen bilden (bzw. Wurzeln ziehen)?

3

$$z^3 = w = 3 + i\sqrt{3}$$



$$z^3 = w = 3 + i\sqrt{3}$$



Potenzierung/Radizierung

Satz: (De Moivresche Formel)
Allgemein: Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

a) Die n-te Potenz von $z = a + ib = r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi}$ ergibt sich zu

$$z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)) = r^n e^{in\phi}.$$

Also gilt die De Moivresche Formel

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi).$$

b) Für jede komplexe Zahl $w = re^{i\phi} \neq 0$ hat die Gleichung $z^n = w$ genau n verschiedene Lösungen, nämlich die n n-ten Wurzeln

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\phi}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\phi}{n} + \frac{k2\pi}{n})},$$

$(k = 0 : n-1)$. Die n-ten Wurzeln liegen auf einem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{r}$ um den Nullpunkt der Gaußschen Zahlenebene und bilden ein regelmäßiges n-Eck.

Bemerkung: Ist ϕ der Hauptwert $Arg\ w$ von $arg\ w$ (gilt also $-\pi < \phi \leq \pi$), so nennt man z_0 den Hauptwert von $\sqrt[n]{z}$.

Fundamentalsatz der Algebra

Motivation

Bemerkung: In $\mathbb{C}$ hat nicht nur die Gleichung 2ten Grades

$$x^2 + px + q = 0$$

für $p, q \in \mathbb{C}$ allgemeine Lösungen, sondern jede algebraische Gleichung beliebigen Grades.

Beobachtung:
Die Lösungen algebraischer Gleichungen sind Nullstellen von Polynomen.

Polynome

Definition: (Polynom)

- Ein Polynom über dem Körper $\mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$p_n(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0:n} a_k x^k,$$

  mit $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0 : n$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- $p_n(x)$ beschreibt bei gegebenen a_k eine Abbildung

$$p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ x \mapsto p_n(x).$$

- Die Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ heißen Koeffizienten von $p_n(x)$.
- n heißt der Grad des Polynoms $p_n(x)$ (schreibe $\deg(p_n)$). Für $a_n \neq 0$ ist $\deg(p_n) = n$.

Nullstellen

Bemerkungen:

- $\bar{x} \in \mathbb{C}$ ist Nullstelle von $p_n(x)$, falls $p_n(\bar{x}) = 0$ gilt.
- Hat $p_n(x)$ eine Nullstelle $\bar{x}$, so lässt sich p_n "durch $(x - \bar{x})$ ohne Rest dividieren", d.h. es gibt ein Polynom $q_{n-1}(x)$ vom Grad $\deg(q_{n-1}) = n - 1$ mit

$$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - \bar{x}).$$

- Ist $\bar{x}$ Nullstelle von $p_n(x)$, so ist $\bar{x}$ Lösung der algebraischen Gleichung n-ten Grades

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Fundamentalsatz

Bemerkungen:

- $p_n(x)$ lässt sich zerlegen in n Linearfaktoren:

$$p_n(x) = a_n (x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_2) \cdots (x - \bar{x}_n),$$

  wobei $\bar{x}_k$ die (nicht notwendig verschiedenen) n Nullstellen von p_n sind.
- Sind $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r \in \mathbb{C}$ die paarweise verschiedenen der n Nullstellen ($r \leq n$), so lassen sich die zugehörigen Linearfaktoren zusammen fassen:

$$p_n(x) = a_n (x - \bar{x}_1)^{m_1} (x - \bar{x}_2)^{m_2} \cdots (x - \bar{x}_r)^{m_r},$$

  mit $m_k \geq 1$ und $\sum_{i=1:r} m_i = n$.
- m_i heißt Vielfachheit einer Nullstelle.

Fundamentalsatz

Satz: Sei

$$p_n(x) = \sum_{k=0:n} a_k x^k$$

mit $a_k \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ (d.h. $n \geq 1$) ein Polynom n-ten Grades über $\mathbb{C}$. Dann gibt es mindestens eine Zahl $\bar{x} \in \mathbb{C}$ mit

$$p_n(\bar{x}) = 0.$$

Motivation

Bemerkung: In $\mathbb{C}$ hat nicht nur die Gleichung 2ten Grades

$$x^2 + px + q = 0$$

für $p, q \in \mathbb{C}$ allgemeine Lösungen, sondern jede algebraische Gleichung beliebigen Grades.

Beobachtung:
Die Lösungen algebraischer Gleichungen sind Nullstellen von Polynomen.

Polynome

Definition: (Polynom)

- Ein Polynom über dem Körper $\mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$p_n(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0:n} a_k x^k,$$

  mit $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0 : n$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- $p_n(x)$ beschreibt bei gegebenen a_k eine Abbildung

$$p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \;\; x \mapsto p_n(x).$$

- Die Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ heißen Koeffizienten von $p_n(x)$.

- n heißt der Grad des Polynoms $p_n(x)$ (schreibe $\deg(p_n)$). Für $a_n \neq 0$ ist $\deg(p_n) = n$.

Nullstellen

Bemerkungen:

- $\bar{x} \in \mathbb{C}$ ist Nullstelle von $p_n(x)$, falls $p_n(\bar{x}) = 0$ gilt.
- Hat $p_n(x)$ eine Nullstelle $\bar{x}$, so lässt sich p_n “durch $(x - \bar{x})$ ohne Rest dividieren”, d.h. es gibt ein Polynom $q_{n-1}(x)$ vom Grad $\deg(q_{n-1}) = n - 1$ mit
$$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - \bar{x}).$$
- Ist $\bar{x}$ Nullstelle von $p_n(x)$, so ist $\bar{x}$ Lösung der algebraischen Gleichung n-ten Grades
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Fundamentalsatz

Satz: Sei

$$p_n(x) = \sum_{k=0:n} a_k x^k$$

mit $a_k \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ (d.h. $n \geq 1$) ein Polynom n-ten Grades über $\mathbb{C}$. Dann gibt es mindestens eine Zahl $\bar{x} \in \mathbb{C}$ mit

$$p_n(\bar{x}) = 0.$$

Fundamentalsatz

Bemerkungen:

- $p_n(x)$ lässt sich zerlegen in n Linearfaktoren:

  $$p_n(x) = a_n(x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_2) \cdots (x - \bar{x}_n),$$

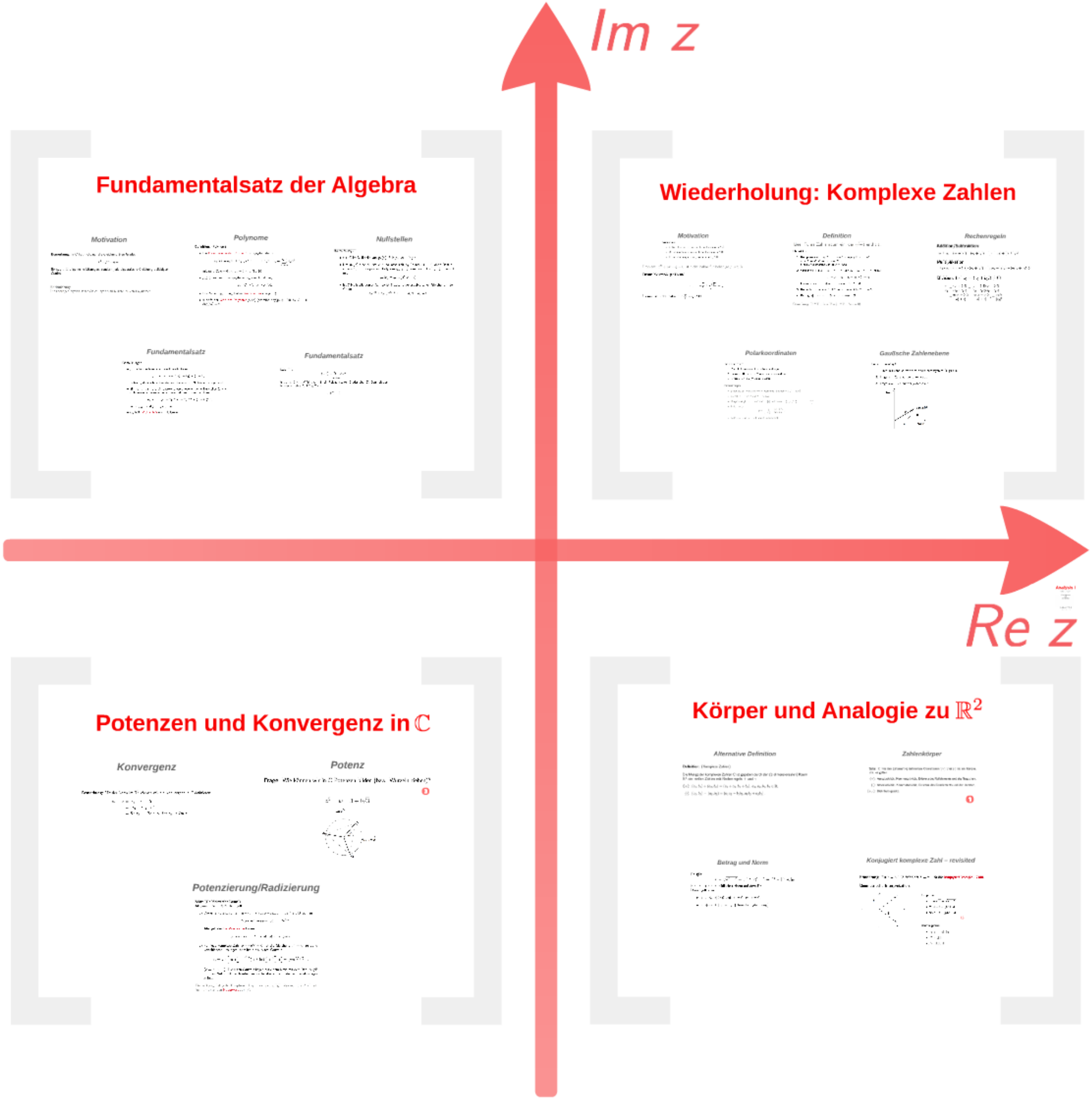
  wobei $\bar{x}_k$ die (nicht notwendig verschiedenen) n Nullstellen von p_n sind.

- Sind $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r \in \mathbb{C}$ die paarweise verschiedenen der n Nullstellen ($r \leq n$), so lassen sich die zugehörigen Linearfaktoren zusammen fassen:

  $$p_n(x) = a_n(x - \bar{x}_1)^{m_1}(x - \bar{x}_2)^{m_2} \cdots (x - \bar{x}_r)^{m_r},$$

  mit $m_k \geq 1$ und $\sum_{i=1:r} m_i = n$.

- m_i heißt Vielfachheit einer Nullstelle.



Im z
Re z
Fundamentalsatz der Algebra
Motivation
Polynome
Nullstellen
Fundamentalsatz
Fundamentalsatz
Wiederholung: Komplexe Zahlen
Motivation
Definition
Rechenregeln
Polarkoordinaten
Gaußsche Zahlenebene
Potenzen und Konvergenz in $\mathbb{C}$
Konvergenz
Potenz
Potenzierung/Radizierung
Körper und Analogie zu $\mathbb{R}^2$
Alternative Definition
Zahlenkörper
Betrag und Norm
Konjugiert komplexe Zahl – revisited