Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Timo Reis
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Wintersemester 2017/2018

Allgemeine Informationen

Informationsquellen

- **Internet**
  www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/1718
- **Vorlesung**
  Dienstag, 13:15–14:45, Audimax I, ab 24.10.2017
  + Videoübertragung in Räume H0.16 und H0.09
  BU, BVT, EUT, LUM, MB, MTB/MEC, SB, VT

  Donnerstag, 11:30–13:00, Audimax II, ab 26.10.2017
  AIW, ET, IN/ IIW
- **Übungen in Tutorgruppen**
  Dr. Hanna Peywand Kiani und Übungsgruppenleiter(innen)
- **Anleitung zu den Übungen** (14-täglich)
  Dr. Hanna Peywand Kiani.
  Montag, 14:45–16:15, Audimax 1, ab 13.11.2017
  Dienstag, 9:45–11:15, Audimax 1, ab 14.11.2017
- **Sprechstunde Prof. Reis**
  Dienstag, E 3.079, 10:00–11:00

... der Dozent
zu meiner Person

seit 2011	Professor an der Uni Hamburg, FB Mathematik
2010 - 2011	Vertretungsprofessor hier an der TUHH
2008 - 2009	Gastwissenschaftler an der Rice University, Houston/Texas
2005 - 2009	wiss. Mitarbeiter an der TU Berlin
2002 - 2006	Dr. rer. nat. (Mathematik) an der TU Kaiserslautern
1998 - 2002	Studium (Mathematik mit Nebenfach Elektrotechnik) an der Uni Kaiserslautern
irgendwann davor	geboren in Trier (Rheinland-Pfalz)

... der Dozent
zu meiner Person

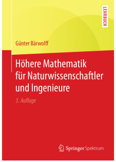
Forschungsinteressen

- mathematische Theorie der Regelung und Steuerung
- Anwendungen in der mechanischen Mehrkörperdynamik
- Simulation und Modellbildung elektrischer Schaltungen

Literatur

PRIMÄR:

G. Bärwolff: **Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure**,
3. Auflage. Springer 2017
`http://www.springer.com/de/book/9783662550212`



SEKUNDÄR:

R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure 1,
3. Auflage. WILEY-VCH, 2000.

FORMELSAMMLUNG:

K. Vetters: **Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik**, Vieweg+Teubner, 2004

Inhalt der Analysis I

1. Logik und Mengen
2. Abbildungen, Zahlen und vollständige Induktion
3. Folgen, Reihen und Konvergenz
4. Elementare Funktionen
5. Stetigkeit von Funktionen
6. Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln
7. Mittelwertsätze, lokale Extrema, Satz von Taylor
8. Regel von de l'Hospital, Kurvendiskussion

Logik und Mengen

Beispiel: Logische Aussagen

$A :=$ "625 ist durch 5, 25 und 125 teilbar"

$B :=$ "$x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung"

$C :=$ "Die Punkte $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 4)$ und $P_2 = (5, 5)$ liegen auf einer Geraden"

Beispiel: Logische Aussagen

$A :=$ “625 ist durch 5, 25 und 125 teilbar”

$B :=$ “$x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung”

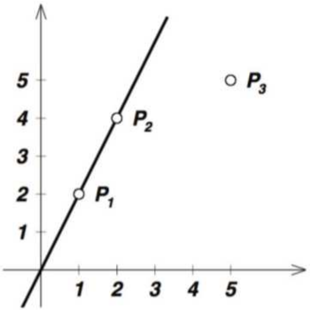
$C :=$ “Die Punkte $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (2,4)$ und $P_2 = (5,5)$ liegen auf einer Geraden”

Beispiel: Logische Aussagen

$A :=$ “625 ist durch 5, 25 und 125 teilbar”

$B :=$ “$x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung”

$C :=$ “Die Punkte $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 4)$ und $P_2 = (5, 5)$ liegen auf einer Geraden”



Logische Aussagen

Postulat

Eine Aussage kann entweder wahr oder falsch sein; ein Drittes gibt es nicht.

Wahrheitswert des vorigen Beispiels:

$$\begin{aligned}\omega(A) &= W\\ \omega(B) &= W\\ \omega(C) &= F\end{aligned}$$

Aussageform (Beispiel):

$A(x) :=$ "Die Punkte $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (2,4)$ und $P_2 = (5,x)$ liegen auf einer Geraden"

Logische Aussagen

Postulat

Eine Aussage kann entweder wahr oder falsch sein; ein Drittes gibt es nicht.

Wahrheitswert des vorigen Beispiels:

$$
\begin{aligned}
\omega(A) &= W \\
\omega(B) &= W \\
\omega(C) &= F
\end{aligned}
$$

Aussageform (Beispiel):

$A(x) :=$ “Die Punkte $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 4)$ und $P_2 = (5, x)$ liegen auf einer Geraden”

Logische Aussagen

Postulat

Eine Aussage kann entweder wahr oder falsch sein; ein Drittes gibt es nicht.

Wahrheitswert des vorigen Beispiels:

$$\begin{aligned} \omega(A) &= W \\ \omega(B) &= W \\ \omega(C) &= F \end{aligned}$$

Aussageform (Beispiel):

$A(x) :=$ "Die Punkte $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (2,4)$ und $P_2 = (5,x)$ liegen auf einer Geraden"

Logische Aussagen

Postulat

Eine Aussage kann entweder wahr oder falsch sein; ein Drittes gibt es nicht.

Wahrheitswert des vorigen Beispiels:

$$\begin{aligned} \omega(A) &= W \\ \omega(B) &= W \\ \omega(C) &= F \end{aligned}$$

Aussageform (Beispiel):

$A(x) :=$ “Die Punkte $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 4)$ und $P_2 = (5, x)$ liegen auf einer Geraden”

Man sieht (sofort):
$A(10)$ ist wahr, also $\omega(A(10)) = W$.

Logische Operationen

Negation

$\neg A$ ist definiert durch $\omega(\neg A) = F$, falls $\omega(A) = W$.

Logische Operationen

Negation

$\neg A$ ist definiert durch $\omega(\neg A) = F$, falls $\omega(A) = W$.

Konjunktion $A \wedge B$:

$\omega(A \wedge B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$ und $\omega(B) = W$.

Logische Operationen

Negation

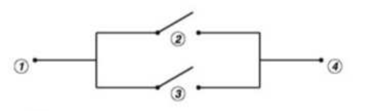
$\neg A$ ist definiert durch $\omega(\neg A) = F$, falls $\omega(A) = W$.

Konjunktion $A \wedge B$:

$\omega(A \wedge B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$ und $\omega(B) = W$.

Disjunktion (Alternative) $A \vee B$

$\omega(A \vee B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = F$ und $\omega(B) = F$.



Logische Operationen (cont.)

Implikation $A \Rightarrow B$

$\omega(A \Rightarrow B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$ und $\omega(B) = F$.

Logische Operationen (cont.)

Implikation $A \Rightarrow B$

$\omega(A \Rightarrow B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$ und $\omega(B) = F$.

Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$

$\omega(A \Leftrightarrow B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = \omega(B)$.

Wahrheitswerttabellen

A	$\neg A$
W	F
F	W

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

Wahrheitswerttabellen

A	$\neg A$
W	F
F	W

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

Beispiel

Aussage

$$C := (A \wedge (B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow \neg B$$

Beispiel

Aussage

$$C := (A \wedge (B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow \neg B$$

Zugehörige Wahrheitswerttabelle

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$B \Rightarrow \neg A$	$A \wedge (B \Rightarrow \neg B)$	C
W	W	F	F	F	F	W
W	F	F	W	W	W	W
F	W	W	F	W	F	W
F	F	W	W	W	F	W

Die Aussage C ist immer wahr ("Tautologie").

Indirekter Beweis

Die folgende Wahrheitswerttabelle ist gültig:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
W	W	F	F	W	W	W
W	F	F	W	F	F	W
F	W	W	F	W	W	W
F	F	W	W	W	W	W

Mathematische Sätze und Beweistechniken.

Standardform eines Satzes:

$$A \quad \Longrightarrow \quad B, \qquad \text{für Aussagen } A, B,$$

wobei A Voraussetzung und B Behauptung heißt.

Mathematische Sätze und Beweistechniken.

Standardform eines Satzes:

$$A \implies B, \qquad \text{für Aussagen } A, B,$$

wobei A Voraussetzung und B Behauptung heißt.

Mögliche Beweistechniken:

Direkter Beweis (Kettenschluss)

$$A = A_0 \implies A_1 \implies A_2 \implies \ldots \implies A_n = B$$

Mathematische Sätze und Beweistechniken.

Standardform eines Satzes:

$$A \quad \Longrightarrow \quad B, \qquad \text{für Aussagen } A, B,$$

wobei A Voraussetzung und B Behauptung heißt.

Mögliche Beweistechniken:

Direkter Beweis (Kettenschluss)

$$A = A_0 \Longrightarrow A_1 \Longrightarrow A_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow A_n = B$$

Indirekter Beweis (Widerspruch)

Benutze

$$A \Longrightarrow B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \neg B \Longrightarrow \neg A$$

Exemplarisches Beispiel für einen ersten Beweis.

Satz

Eine natürliche Zahl n ist genau dann gerade, wenn ihr Quadrat n^2 gerade ist, d.h. für alle natürlichen Zahlen n gilt die Äquivalenz

$$n \text{ gerade} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n^2 \text{ gerade.}$$

Exemplarisches Beispiel für einen ersten Beweis.

Satz

Eine natürliche Zahl n ist genau dann gerade, wenn ihr Quadrat n^2 gerade ist, d.h. für alle natürlichen Zahlen n gilt die Äquivalenz

$$n \text{ gerade} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n^2 \text{ gerade.}$$

Beweis: Führe den Beweis in zwei Schritten:
Zeige

$$n \text{ gerade} \qquad \Longrightarrow \qquad n^2 \text{ gerade.}$$

Zeige

$$n^2 \text{ gerade} \qquad \Longrightarrow \qquad n \text{ gerade.}$$

Vorüberlegungen

Eine nat. Zahl n ist ...

... genau dann gerade, wenn $n = 2k$ für eine nat. Zahl k.

... genau dann ungerade, wenn $n = 2k - 1$ für eine nat. Zahl k.

Vorüberlegungen

Eine nat. Zahl n ist ...

... genau dann gerade, wenn $n = 2k$ für eine nat. Zahl k.

... genau dann ungerade, wenn $n = 2k - 1$ für eine nat. Zahl k.

Vorüberlegungen

Eine nat. Zahl n ist ...

... genau dann gerade, wenn $n = 2k$ für eine nat. Zahl k.

... genau dann ungerade, wenn $n = 2k - 1$ für eine nat. Zahl k.

Vorüberlegungen

Eine nat. Zahl n ist ...

... genau dann gerade, wenn $n = 2k$ für eine nat. Zahl k.

... genau dann ungerade, wenn $n = 2k - 1$ für eine nat. Zahl k.

n gerade $\Rightarrow n^2$ gerade (direkter Beweis)

n^2 gerade $\Rightarrow n$ gerade (indirekter Beweis)

Quantoren

... zur Abkürzung häufig benutzter Floskeln

Quantoren

- $\forall$ "für alle";
- $\exists$ "es existiert";

Sei $A(x)$ eine Aussageform. Dann definieren wir neue Aussagen wie folgt.

- $\forall x : A(x)$ "für alle x gilt $A(x)$";
- $\exists x : A(x)$ "es gibt *mindestens* ein x, für das $A(x)$ gilt"

Quantoren

... zur Abkürzung häufig benutzter Floskeln

Quantoren

- $\forall$ “für alle”;
- $\exists$ “es existiert”;

Sei $A(x)$ eine Aussageform. Dann definieren wir neue Aussagen wie folgt.

- $\forall x : A(x)$ “für alle x gilt $A(x)$”;
- $\exists x : A(x)$ “es gibt *mindestens* ein x, für das $A(x)$ gilt”

Quantoren

Die Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen werden entsprechend definiert:

$$\begin{aligned} \forall\, x : A(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{für alle } x \text{ gilt } A(x) \\ \exists\, x : A(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt } \textit{mindestens} \text{ ein } x, \text{ so dass } A(x) \end{aligned}$$

Negation von Quantoren

Es gilt

$$\begin{aligned} \neg\Big(\forall\, x : A(x)\Big) \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, x : \Big(\neg A(x)\Big) \\ \neg\Big(\exists\, x : A(x)\Big) \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\, x : \Big(\neg A(x)\Big) \end{aligned}$$

Negation von Quantoren

Beispiel:

Definition

Eine Menge ist eine Kollektion von paarweise verschiedenen Objekten. Die einzelnen Objekte werden Elemente der Menge genannt.

Definition

Eine Menge ist eine Kollektion von paarweise verschiedenen Objekten. Die einzelnen Objekte werden Elemente der Menge genannt.

Beispiele

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen;
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen;
- Studierende der TUHH;
- Hörer der Analysis I im WiSe 2017/2018;
- Menge der Primzahlen.

Definition

Eine Menge ist eine Kollektion von paarweise verschiedenen Objekten. Die einzelnen Objekte werden Elemente der Menge genannt.

Beispiele

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen;
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen;
- Studierende der TUHH;
- Hörer der Analysis I im WiSe 2017/2018;
- Menge der Primzahlen.

Notationen

Sei M eine Menge.

$$a \in M \iff a \text{ ist ein Element der Menge } M$$

$$a \notin M \iff \neg(a \in M)$$

Mengen

Beispiel:

Mengen

- Aufzählung der Elemente: $M := \{1, 2, 3, 4\}$
- Charakterisierende Eigenschaft der Menge, $M := \{x \in \Omega | A(x)\}$

Bedeutung der verwendeten Symbole

$:=$	"wird definiert durch"
$A(x)$	Aussageform, definiert für Elemente x aus Ω

Teilmengen

$M \subset N$, wenn

$$\forall x : (x \in M \Longrightarrow x \in N)$$

Gleichheit von Mengen

$M = N$, wenn

$$\forall x : (x \in M \Longleftrightarrow x \in N)$$

Leere Menge

Menge, die kein Element enthält. Bezeichnung: $\emptyset$

Mengen

- Aufzählung der Elemente: $M := \{1, 2, 3, 4\}$
- Charakterisierende Eigenschaft der Menge, $M := \{x \in \Omega | A(x)\}$

Bedeutung der verwendeten Symbole

$:=$	"wird definiert durch"
$A(x)$	Aussageform, definiert für Elemente x aus Ω

Teilmengen

$M \subset N$, wenn

$$\forall x : (x \in M \Longrightarrow x \in N)$$

Gleichheit von Mengen

$M = N$, wenn

$$\forall x : (x \in M \Longleftrightarrow x \in N)$$

Leere Menge

Menge, die kein Element enthält. Bezeichnung: $\emptyset$

Mengen

- Aufzählung der Elemente: $M := \{1, 2, 3, 4\}$
- Charakterisierende Eigenschaft der Menge, $M := \{x \in \Omega | A(x)\}$

Bedeutung der verwendeten Symbole

$:=$	"wird definiert durch"
$A(x)$	Aussageform, definiert für Elemente x aus Ω

Teilmengen

$M \subset N$, wenn

$$\forall x : (x \in M \Longrightarrow x \in N)$$

Gleichheit von Mengen

$M = N$, wenn

$$\forall x : (x \in M \Longleftrightarrow x \in N)$$

Leere Menge

Menge, die kein Element enthält. Bezeichnung: $\emptyset$

Mengen

- Aufzählung der Elemente: $M := \{1, 2, 3, 4\}$
- Charakterisierende Eigenschaft der Menge, $M := \{x \in \Omega | A(x)\}$

Bedeutung der verwendeten Symbole

$:=$ "wird definiert durch"

$A(x)$ Aussageform, definiert für Elemente x aus Ω

Teilmengen

$M \subset N$, wenn

$$\forall x : (x \in M \Longrightarrow x \in N)$$

Gleichheit von Mengen

$M = N$, wenn

$$\forall x : (x \in M \Longleftrightarrow x \in N)$$

Leere Menge

Menge, die kein Element enthält. Bezeichnung: $\emptyset$

Mengen

- Aufzählung der Elemente: $M := \{1, 2, 3, 4\}$
- Charakterisierende Eigenschaft der Menge, $M := \{x \in \Omega | A(x)\}$

Bedeutung der verwendeten Symbole

:=	"wird definiert durch"
$A(x)$	Aussageform, definiert für Elemente x aus Ω

Teilmengen

$M \subset N$, wenn

$$\forall x : (x \in M \Longrightarrow x \in N)$$

Gleichheit von Mengen

$M = N$, wenn

$$\forall x : (x \in M \Longleftrightarrow x \in N)$$

Leere Menge

Menge, die kein Element enthält. Bezeichnung: $\emptyset$

Eigenschaften

- $M \subset M$;
- $(M \subset N) \wedge (N \subset M) \implies M = N$;
- $(M \subset N) \wedge (N \subset P) \implies M \subset P$.

Verknüpfung von Mengen

$$
\begin{array}{lcll}
M \cup N & := & \{x \mid x \in M \vee x \in N\} & \text{(Vereinigung)} \\
M \cap N & := & \{x \mid x \in M \wedge x \in N\} & \text{(Durchschnitt)} \\
M \setminus N & := & \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\} & \text{(Differenz)} \\
M \times N & := & \{(a, b) \mid a \in M \wedge b \in N\} & \text{(Cartesisches Produkt)} \\
\mathcal{P}(\mathcal{M}) & := & \{X \mid X \subset M\} & \text{(Potenzmenge)}
\end{array}
$$

Eigenschaften

- $M \subset M$;
- $(M \subset N) \wedge (N \subset M) \quad \Longrightarrow \quad M = N$;
- $(M \subset N) \wedge (N \subset P) \quad \Longrightarrow \quad M \subset P$.

Verknüpfung von Mengen

$$
\begin{array}{lcll}
M \cup N & := & \{x \,|\, x \in M \vee x \in N\} & \text{(Vereinigung)} \\
M \cap N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \in N\} & \text{(Durchschnitt)} \\
M \setminus N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \notin N\} & \text{(Differenz)} \\
M \times N & := & \{(a,b) \,|\, a \in M \wedge b \in N\} & \text{(Cartesisches Produkt)} \\
\mathcal{P}(\mathcal{M}) & := & \{X \,|\, X \subset M\} & \text{(Potenzmenge)}
\end{array}
$$

Verknüpfung von Mengen

Weitere Bezeichnungen

- Gilt $M \cap N = \emptyset$, so nennt man M und N disjunkt.
- Verknüpfung von endlich vielen Mengen.

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \\
&:= \{a \,|\, \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a \in A_i\} \\
\bigcap_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \\
&:= \{a \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a \in A_i\} \\
\prod_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \\
&:= \{(a_1, \ldots, a_n) \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a_i \in A_i\}
\end{aligned}
$$

Weitere Bemerkungen und Bezeichnungen.

Für geordnete Paare bzw. n-Tupel gilt:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a_1 = b_1 \ \wedge \ a_2 = b_2$$
$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \iff \forall\, i \in \{1, \dots, n\} \ : \ x_i = y_i$$

Weitere Bemerkungen und Bezeichnungen.

Für geordnete Paare bzw. n-Tupel gilt:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$$
$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \iff \forall\, i \in \{1, \dots, n\} : x_i = y_i$$

Wichtige Cartesische Produkte

- die Euklidische Ebene

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

- der dreidimensionale Euklidische Raum

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

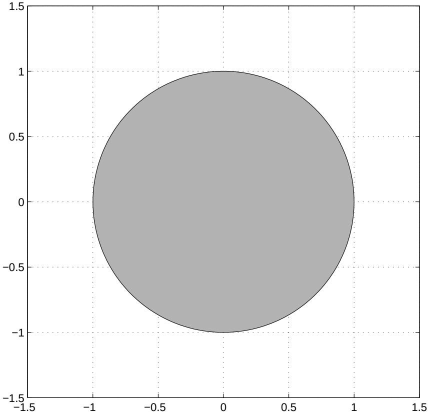
- der n-dimensionale Euklidische Raum

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}} = \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}\}$$

Der Einheitskreis

- Kreisscheibe mit Radius 1

$$A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \right\}$$



Zwei Streifen

$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 5 \leq x^2 + 1 \leq 17\}$

Zwei Streifen

$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 5 \leq x^2 + 1 \leq 17\}$

Beachte:

$$5 \leq x^2 + 1 \leq 17 \iff 4 \leq x^2 \leq 16 \iff -4 \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 4$$

Zwei Streifen

$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 5 \leq x^2 + 1 \leq 17\}$

Beachte:

$$5 \leq x^2 + 1 \leq 17 \iff 4 \leq x^2 \leq 16 \iff -4 \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 4$$

und somit gilt

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -4 \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 4\}.$$

Zwei Streifen

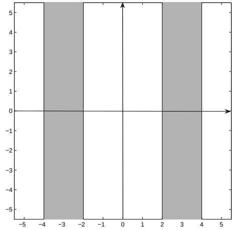
$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 5 \leq x^2 + 1 \leq 17\}$

Beachte:

$$5 \leq x^2 + 1 \leq 17 \iff 4 \leq x^2 \leq 16 \iff -4 \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 4$$

und somit gilt

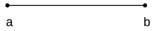
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -4 \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 4\}.$$



Intervalle in $\mathbb{R}$.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

$[a, b] := \{x \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall



$(a, b) := \{x \mid a < x < b\}$ offenes Intervall

$[a, b) := \{x \mid a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall

$(a, b] := \{x \mid a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall

Abbildungen, Zahlen und vollständige Induktion

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

Buch Kap. 1.4

Peano: Axiome zur Charakterisierung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

1. 1 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' (Schreibweise 2=1', 3=2' usw.).
3. 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).
5. Induktionsprinzip: Sei $A \subset \mathbb{N}$ mit
   (i) $1 \in A$,
   (ii) $n \in A \Longrightarrow n' \in A$.
   Dann ist $A = \mathbb{N}$.

Notation: $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

Peano: Axiome zur Charakterisierung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

1. 1 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' (Schreibweise 2=1', 3=2' usw.).
3. 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).
5. Induktionsprinzip: Sei $A \subset \mathbb{N}$ mit
(i) $1 \in A$,
(ii) $n \in A \Longrightarrow n' \in A$.
Dann ist $A = \mathbb{N}$.

Notation: $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

Peano: Axiome zur Charakterisierung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

1. 1 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n'
(Schreibweise 2=1', 3=2' usw.).
3. 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).
5. Induktionsprinzip: Sei $A \subset \mathbb{N}$ mit
(i) $1 \in A$,
(ii) $n \in A \Longrightarrow n' \in A$.
Dann ist $A = \mathbb{N}$.

Notation: $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

Peano: Axiome zur Charakterisierung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

1. 1 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' (Schreibweise 2=1', 3=2' usw.).
3. 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).
5. Induktionsprinzip: Sei $A \subset \mathbb{N}$ mit
   (i) $1 \in A$,
   (ii) $n \in A \Longrightarrow n' \in A$.
   Dann ist $A = \mathbb{N}$.

Notation: $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

Peano: Axiome zur Charakterisierung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

1. 1 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n'
(Schreibweise 2=1', 3=2' usw.).
3. 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).
5. Induktionsprinzip: Sei $A \subset \mathbb{N}$ mit
(i) $1 \in A$,
(ii) $n \in A \Longrightarrow n' \in A$.
Dann ist $A = \mathbb{N}$.

Notation: $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

Buch Kap. 1.4

Peano: Axiome zur Charakterisierung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

1. 1 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n’ (Schreibweise 2=1’, 3=2’ usw.).
3. 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).
5. Induktionsprinzip: Sei $A \subset \mathbb{N}$ mit
   (i) $1 \in A$,
   (ii) $n \in A \Longrightarrow n' \in A$.
   Dann ist $A = \mathbb{N}$.

Notation: $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Vollständige Induktion

Buch Kap. 1.4

Prinzip der vollständigen Induktion

Seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussageform für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.
Wenn die beiden Aussagen

1. $A(n_0)$ ist wahr,
2. für alle $k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0 : \quad A(k)$ ist wahr $\Longrightarrow A(k+1)$ ist wahr

gelten, dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Vollständige Induktion

Prinzip der vollständigen Induktion

Seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussageform für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Wenn die beiden Aussagen

1. $A(n_0)$ ist wahr,
2. für alle $k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0 :\quad A(k)$ ist wahr $\Longrightarrow A(k+1)$ ist wahr

gelten, dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Vollständige Induktion

Beispiel 1 (Gaußsche Summenformel)

Zu zeigen ist die Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k := 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis durch vollständige Induktion nach n:

Beispiel 1 (Gaußsche Summenformel)

Zu zeigen ist die Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k := 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Direkter Beweis:

Vollständige Induktion

Beispiel 2 (Bernoullische Ungleichung)

Zu zeigen ist die Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$ gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis durch vollständige Induktion nach *n*:

Zurück zu $\mathbb{N}$

Fundamentalsatz der Arithmetik (Primfaktorzerlegung)

Jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich auf eine und nur eine Weise als Produkt endlich vieler Primzahlen darstellen, wenn man die Primzahlen der Größe nach ordnet.

Beispiele:

Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \dots\}$

Buch Kap. 1.5

Grundlegende Eigenschaft

Für jede gegebene $n, m \in \mathbb{Z}$ ist die Gleichung

$$n + x = m$$

nach x auflösbar.

Konsequenz:

$\mathbb{Z}$ abgeschlossen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation.

Aber:

Nicht gegenüber Division, denn

Sucht man eine Lösung x der Gleichung $nx = m$ für $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, so gibt es eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ nur dann, wenn n ein Teiler von m ist.

$\rightsquigarrow$ Erweiterung von $\mathbb{Z}$ notwendig.

Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots\}$

Buch Kap. 1.5

Grundlegende Eigenschaft

Für jede gegebene $n, m \in \mathbb{Z}$ ist die Gleichung

$$n + x = m$$

nach x auflösbar.

Konsequenz:

$\mathbb{Z}$ abgeschlossen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation.

Aber:

Nicht gegenüber Division, denn

Sucht man eine Lösung x der Gleichung $nx = m$ für $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, so gibt es eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ nur dann, wenn n ein Teiler von m ist.

$\rightsquigarrow$ Erweiterung von $\mathbb{Z}$ notwendig.

Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \dots\}$

Buch Kap. 1.5

Grundlegende Eigenschaft

Für jede gegebene $n, m \in \mathbb{Z}$ ist die Gleichung

$$n + x = m$$

nach x auflösbar.

Konsequenz:

$\mathbb{Z}$ abgeschlossen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation.

Aber:

Nicht gegenüber Division, denn

Sucht man eine Lösung x der Gleichung $nx = m$ für $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, so gibt es eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ nur dann, wenn n ein Teiler von m ist.

$\rightsquigarrow$ Erweiterung von $\mathbb{Z}$ notwendig.

Rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ q \mid q = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

wobei

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \iff a_1 b_2 = a_2 b_1 .$$

Es gilt $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (setze $b = 1$).

Addition und Multiplikation in $\mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Kürzen

Wir können immer dafür sorgen, dass "a, b teilerfremd" sind.

Grundlage dafür: Primfaktorenzerlegung von Zähler und Nenner. Es wird solange "gekürzt", bis in Zähler und Nenner nur noch unterschiedliche Primzahlen vorhanden sind.

Rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ q \mid q = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

wobei

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \iff a_1 b_2 = a_2 b_1 .$$

Es gilt $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (setze $b = 1$).

Addition und Multiplikation in $\mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Kürzen

Wir können immer dafür sorgen, dass "a, b teilerfremd" sind.

Grundlage dafür: Primfaktorenzerlegung von Zähler und Nenner. Es wird solange "gekürzt", bis in Zähler und Nenner nur noch unterschiedliche Primzahlen vorhanden sind.

Rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ q \mid q = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

wobei

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \iff a_1 b_2 = a_2 b_1 .$$

Es gilt $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (setze $b = 1$).

Addition und Multiplikation in $\mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Kürzen

Wir können immer dafür sorgen, dass "a, b teilerfremd" sind.

Grundlage dafür: Primfaktorenzerlegung von Zähler und Nenner. Es wird solange "gekürzt", bis in Zähler und Nenner nur noch unterschiedliche Primzahlen vorhanden sind.

Rationale Zahlen

Division

In $\mathbb{Q}$ hat die Gleichung $nx = m,\ (n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq 0)$ eine Lösung $x = \frac{m}{n}$.

Rationale Zahlen

Buch Kap. 1.5

Periodischer Dezimalbruch

$a \in \mathbb{Q} \to a$ darstellbar als unendlicher periodischer Dezimalbruch:

$$a = \sum_{n=0}^{m} z_{m-n} 10^{m-n} + \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k} 10^{-k} \, , z_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Kurzform

$$a = z_m z_{m-1} \dots z_0, z_{-1} z_{-2} \dots$$

Rationale Zahlen

Periodischer Dezimalbruch

$a \in \mathbb{Q} \rightarrow a$ darstellbar als unendlicher periodischer Dezimalbruch:

$$a = \sum_{n=0}^{m} z_{m-n} 10^{m-n} + \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k} 10^{-k} \ , z_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Kurzform

$$a = z_m z_{m-1} \dots z_0, z_{-1} z_{-2} \dots$$

Beispiele

$$\begin{aligned}\frac{1}{7} &= 0,142857142857142857\ldots \\ &= 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-6} + \ldots\end{aligned}$$

Periode hier 142857.

$$\begin{aligned}\frac{90}{8} &= 11.25000\ldots \\ &= 1 \cdot 10^{1} + 1 \cdot 10^{0} + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}.\end{aligned}$$

Periode hier 0.

Rationale Zahlen

Beispiele

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{7} =& 0,142857142857142857\ldots \\
=& 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-6} + \ldots
\end{aligned}
$$

Periode hier 142857.

$$
\begin{aligned}
\frac{90}{8} =& 11.25000\ldots \\
=& 1 \cdot 10^{1} + 1 \cdot 10^{0} + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}.
\end{aligned}
$$

Periode hier 0.

Reelle Zahlen

Beachte

$x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$ existiert nicht!

Begründung:

Erweiterung von $\mathbb{Q}$ notwendig $\to$ Reelle Zahlen

Reelle Zahlen

Beachte

$x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$ existiert nicht!

Begründung:

Erweiterung von $\mathbb{Q}$ notwendig $\rightarrow$ Reelle Zahlen

Reelle Zahlen

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist unendlicher Dezimalbruch}\}.$$

Problematisch

Aufschreiben solcher nichtperiodischer Dezimalbrüche. Man kann nur Näherungen angeben, z.B.

$$1,41\ ; \quad 1,414\ ; \quad 1,4142\ ; \quad 1,41421\ \ldots$$

für $x = \sqrt{2}$, oder

$$3,14\ ; \quad 3,141\ ; \quad 3,1415\ ; \quad 3,14159\ \ldots$$

für $x = \pi$ (später).

Beim Rechnen mit diesen nichtperiodischen Dezimalbrüchen muss man sich im Allg. auch auf Näherungswerte in Form endlicher Dezimalbrüche stützen.

Komplexe Zahlen - Motivation

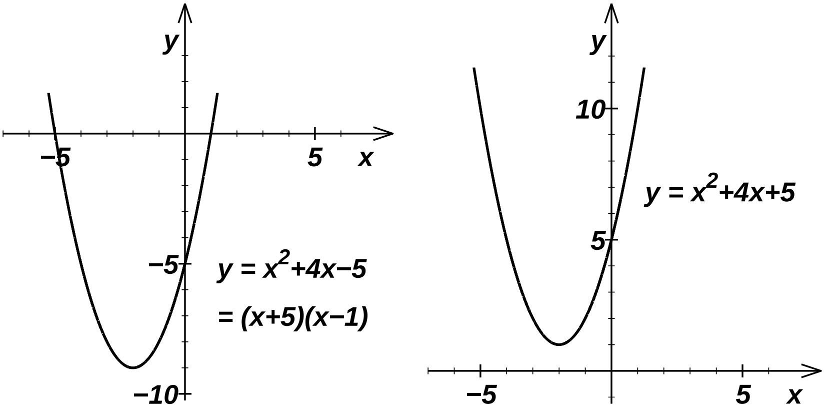


Abb. 1.22: Quadratische Gleichungen mit und ohne Lösungen in $\mathbb{R}$

Erweiterung von $\mathbb{R}$ notwendig $\to$ Komplexe Zahlen.

Komplexe Zahlen

Wir wollen ein Zahlenmenge definieren, in dem jedes Polynom eine Nullstelle besitzt. Betrachte etwa $x^2 + 4x + 5 = 0$. Mit der "*pq*-Formel" ergibt sich

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-1}.$$

Frage

Was ist

$$\sqrt{-1} \ ?$$

Komplexe Zahlen

Wir wollen ein Zahlenmenge definieren, in dem jedes Polynom eine Nullstelle besitzt. Betrachte etwa $x^2 + 4x + 5 = 0$. Mit der "*pq*-Formel" ergibt sich

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-1}.$$

Frage

Was ist

$$\sqrt{-1} \quad ?$$

Komplexe Zahlen

Imaginäre Einheit

Unter der imaginären Einheit versteht man den Ausdruck i.
Es gilt dabei

$$i^2 = -1.$$

Komplexe Zahl

Unter einer **komplexen Zahl** $z \in \mathbb{C}$ versteht man einen Ausdruck der Form

$$z := a + b\,i \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

1. $a \in \mathbb{R}$ heißt Realteil von z : $\quad a =: Re\, z$.
2. $b \in \mathbb{R}$ heißt Imaginärteil von z : $\quad b =: Im\, z$.
3. Zwei **komplexe Zahlen sind gleich**, wenn sowohl Realteil als auch Imaginärteil übereinstimmen.

Komplexe Zahlen

Imaginäre Einheit

Unter der imaginären Einheit versteht man den Ausdruck i.
Es gilt dabei

$$i^2 = -1.$$

Komplexe Zahl

Unter einer **komplexen Zahl** $z \in \mathbb{C}$ versteht man einen Ausdruck der Form

$$z := a + b\,i \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

1. $a \in \mathbb{R}$ heißt Realteil von z : $\quad a =: Re\, z$.
2. $b \in \mathbb{R}$ heißt Imaginärteil von z : $\quad b =: Im\, z$.
3. Zwei **komplexe Zahlen sind gleich**, wenn sowohl Realteil als auch Imaginärteil übereinstimmen.

Komplexe Zahlen

Imaginäre Einheit

Unter der imaginären Einheit versteht man den Ausdruck i.
Es gilt dabei

$$i^2 = -1.$$

Komplexe Zahl

Unter einer **komplexen Zahl** $z \in \mathbb{C}$ versteht man einen Ausdruck der Form

$$z := a + b\,i \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

1. $a \in \mathbb{R}$ heißt Realteil von z : $\quad a =: Re\, z$.
2. $b \in \mathbb{R}$ heißt Imaginärteil von z : $\quad b =: Im\, z$.
3. Zwei **komplexe Zahlen sind gleich**, wenn sowohl Realteil als auch Imaginärteil übereinstimmen.

Komplexe Zahlen

Betrag und Konjugation

Gegeben sei eine komplexe Zahl

$$z := a + b\,i \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

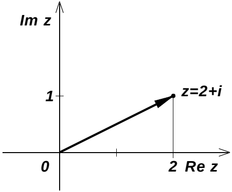
1. $$\bar{z} = a - b\,i$$

   heißt die zu z konjugiert komplexe Zahl.

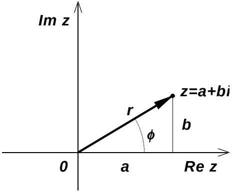
2. Unter dem Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z = a + b\,i$ versteht man die nichtnegative reelle Zahl $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Rechnen in $\mathbb{C}$

Die GAUSSsche Zahlenebene Buch Kap. 1.7 (Abb. 1.23/1.24)



$z = 2 + i \in \mathbb{C}$ in GAUSSscher Ebene

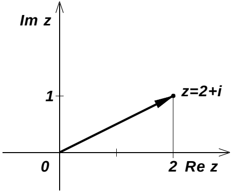


Polarkoordinaten in GAUSSscher Ebene

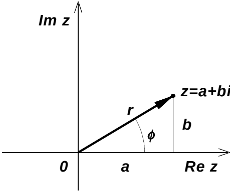
Fakten

- Jeder Punkt $z \in \mathbb{C}$ der Gauß'schen Zahlenebene ist eindeutig charakterisiert durch eine Länge $r := |z|$ und einen Winkel $\operatorname{Arg} z := \phi \in [0, 2\pi)$.
- Beachte, dass Winkel $\phi + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ bei gleichem r dieselbe komplexe Zahl beschreiben.
- $z = r(\cos\phi + i \sin\phi)$.

Die GAUSSsche Zahlenebene Buch Kap. 1.7 (Abb. 1.23/1.24)



$z = 2 + i \in \mathbb{C}$ in GAUSSscher Ebene

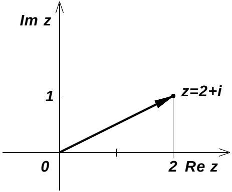


Polarkoordinaten in GAUSSscher Ebene

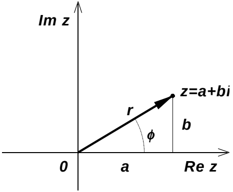
Fakten

- Jeder Punkt $z \in \mathbb{C}$ der Gauß'schen Zahlenebene ist eindeutig charakterisiert durch eine Länge $r := |z|$ und einen Winkel $\mathrm{Arg}\, z := \phi \in [0, 2\pi)$.
- Beachte, dass Winkel $\phi + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ bei gleichem r dieselbe komplexe Zahl beschreiben.
- $z = r\,(\cos\phi + i\sin\phi)$.

Die GAUSSsche Zahlenebene Buch Kap. 1.7 (Abb. 1.23/1.24)



$z = 2 + i \in \mathbb{C}$ in GAUSSscher Ebene



Polarkoordinaten in GAUSSscher Ebene

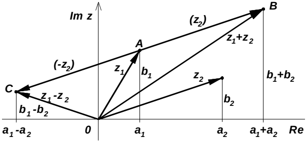
Fakten

- Jeder Punkt $z \in \mathbb{C}$ der Gauß'schen Zahlenebene ist eindeutig charakterisiert durch eine Länge $r := |z|$ und einen Winkel $\operatorname{Arg} z := \phi \in [0, 2\pi)$.
- Beachte, dass Winkel $\phi + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ bei gleichem r dieselbe komplexe Zahl beschreiben.
- $z = r\,(\cos\phi + i \sin\phi)$.

Die GAUSSsche Zahlenebene

Buch Kap. 1.7.2

$z = a + b\,i$ kann in Gauß'scher Ebene durch Vektor $\vec{0z}$ mit Komponenten a, b dargestellt werden. Addition und Subtraktion entsprechen dann Addition und Subtraktion von Vektoren.



Dreiecksungleichung

Aus dem Dreieck $0AB$ liest man ab:

$$|\overline{0B}| \leq |\overline{0A}| + |\overline{AB}| \,, \qquad \text{also} \qquad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \,.$$

Ebenso gilt im Dreieck $0AC$

$$|\overline{0C}| \geq |\overline{AC}| - |\overline{0A}| \quad \text{und}$$
$$|\overline{0C}| \geq |\overline{0A}| - |\overline{AC}| \,, \quad \text{also} \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten

Buch Kap. 1.7.2

Polarkoordinaten

Sei $z = a + b\,i$. Dann gilt mit $r := |z|$

$$a = r\cos\phi\ ,\ b = r\sin\phi\ ,\ r = \sqrt{a^2 + b^2}\ ,\ \tan\phi = \frac{b}{a} \quad (a \neq 0).$$

Multiplikation und Division

Für $z = |z|(\cos\,\phi + i\,\sin\,\phi)$ und $w = |w|(\cos\,\psi + i\,\sin\,\psi)$ in Polarkoordinatendarstellung ergibt sich

$$z \cdot w = |z||w|(\cos(\phi + \psi) + i\,\sin(\phi + \psi)).$$

Für die Division zweier komplexer Zahlen z und w ($|w| \neq 0$) ergibt sich

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\phi - \psi) + i\,\sin(\phi - \psi)),$$

Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten

Buch Kap. 1.7.2

Konsequenz

- Bei Multiplikation zweier komplexer Zahlen multiplizieren sich die Beträge und addieren sich die Winkel.
- Bei Division zweier komplexer Zahlen dividieren sich die Beträge und subtrahieren sich die Winkel.

Beispiele

Begriff der Funktion

Buch Kap. 2.1

Definition 2.1: Reelle Funktion einer reellen Veränderlichen

Sei $D \subset \mathbb{R}$. Dann heißt eine Abbildung

$$f : D \to \mathbb{R},$$

welche jedem $x \in D$ genau ein $y = f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet, reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen.

Definitionsbereich, Wertebereich, (Ur-)Bildmenge

$D = D(f) \subset \mathbb{R}$ Definitionsbereich von f,

$W = \{y \mid \exists x \in D \text{ mit } y = f(x)\}$ Wertebereich von f.

Sind $A \subseteq \mathbb{R}$ und $B \subseteq \mathbb{R}$, so nennen wir

$f(A) := \{y \in B | \text{ es gibt ein } x \in A \text{ mit } y = f(x)\}$ Bildmenge von A,

$f^{-1}(B) := \{x \in A | f(x) \in B\}$ Urbildmenge von B.

Begriff der Funktion

Buch Kap. 2.1

Definition 2.1: Reelle Funktion einer reellen Veränderlichen

Sei $D \subset \mathbb{R}$. Dann heißt eine Abbildung

$$f : D \to \mathbb{R},$$

welche jedem $x \in D$ genau ein $y = f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet, reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen.

Definitionsbereich, Wertebereich, (Ur-)Bildmenge

$D = D(f) \subset \mathbb{R}$	Definitionsbereich von f,
$W = \{y \mid \exists x \in D \text{ mit } y = f(x)\}$	Wertebereich von f.

Sind $A \subseteq \mathbb{R}$ und $B \subseteq \mathbb{R}$, so nennen wir

$f(A) := \{y \in B \mid \text{es gibt ein } x \in A \text{ mit } y = f(x)\}$	Bildmenge von A,
$f^{-1}(B) := \{x \in A \mid f(x) \in B\}$	Urbildmenge von B.

Funktion

Beispiele

Begriff der Funktion

Definition 2.1 (Fortsetzung)

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

- injektiv (eineindeutig), falls

$$a \neq a' \Longrightarrow f(a) \neq f(a')$$

- surjektiv (Abbildung auf, $f(A) = B$),

$$\forall b \in B \, \exists \, a \in A : \quad b = f(a).$$

- bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Die Funktionen f und g sind gleich ($f = g$), genau dann, wenn

- $D(f) = D(g)$ und
- $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D(f)$

Begriff der Funktion

Definition 2.1 (Fortsetzung)

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

- injektiv (eineindeutig), falls

$$a \neq a' \implies f(a) \neq f(a')$$

- surjektiv (Abbildung auf, $f(A) = B$),

$$\forall b \in B \, \exists \, a \in A : \quad b = f(a).$$

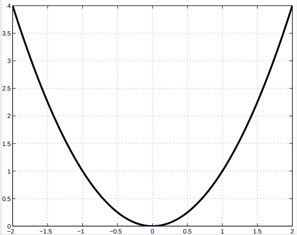
- bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Die Funktionen f und g sind gleich ($f = g$), genau dann, wenn

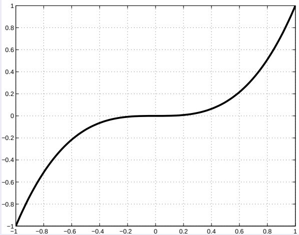
- $D(f) = D(g)$ und
- $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D(f)$

Funktion

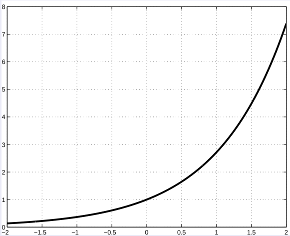
Beispiele



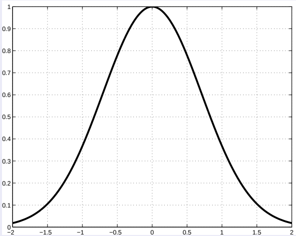
x^2



x^3



e^x

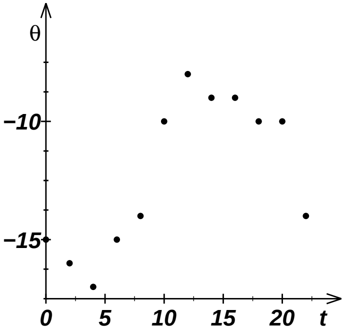


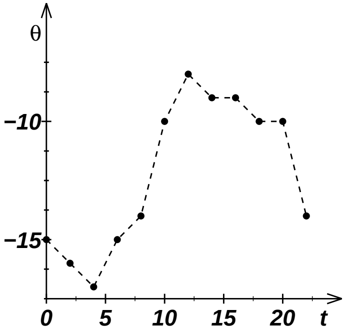
e^{-x^2}

Funktion

Beispiele

Funktion





Links: Abb. 2.2, Temperaturmessreihe $\theta(t)$ am 5.12.98.
Rechts: Abb. 2.3: Temperaturmessreihe linear interpoliert.

Begriff der Funktion

Buch Kap. 2.1

Definition 2.2: (Umkehrfunktion f^{-1})

Ist $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ bijektiv, so ist jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ zugeordnet. Damit ist eine Funktion $f^{-1} : B \to A$ gemäß

$$f^{-1}(y) = x, \quad \text{falls} \quad y = f(x),$$

definiert, welche Umkehrfunktion zu f heißt.

Natürlich ist dann auch $f^{-1} : B \to A$ bijektiv.

Definition 2.2: (Umkehrfunktion f^{-1})

Ist $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ bijektiv, so ist jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ zugeordnet. Damit ist eine Funktion $f^{-1} : B \to A$ gemäß

$$f^{-1}(y) = x, \quad \text{falls} \quad y = f(x),$$

definiert, welche Umkehrfunktion zu f heißt.

Natürlich ist dann auch $f^{-1} : B \to A$ bijektiv.

Umkehrfunktion

Buch Kap. 2.1

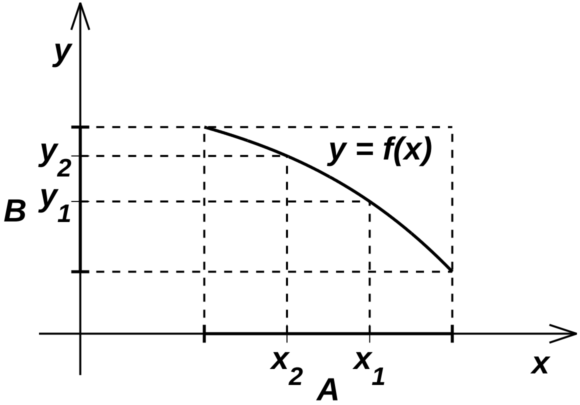


Abbildung 2.4: Die Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = x$ einer bijektiven Funktion $y = f(x)$ ist bijektiv

Umkehrfunktion

Buch Kap. 2.1

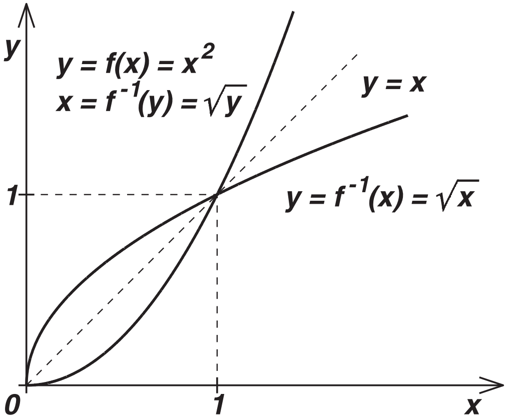


Abbildung 2.5: Umkehrfunktion $y = \sqrt{x}$ zu $y = x^2$, $A = B = \mathbb{R}_{\geq 0}$

Umkehrfunktion

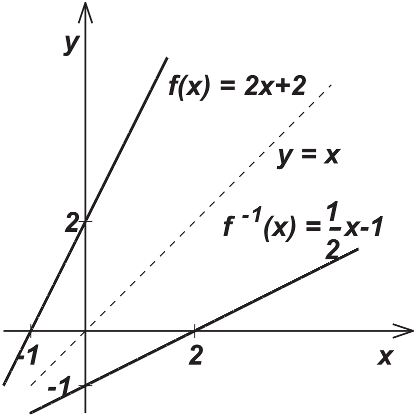


Abbildung 2.6: Funktion und Umkehrfunktion einer linearen Abbildung

Berechnung der Umkehrfunktion

Buch Kap. 2.1

Algorithmus (Vorschrift zur Vorgehensweise)

Ist $f : A \to B$ bijektiv, so ergibt sich $f^{-1} : B \to A$ durch

1) $y = f(x)$ nach x auflösen $\to x = f^{-1}(y)$,
2) x und y vertauschen $\to y = f^{-1}(x)$.

$y = f^{-1}(x)$ und $y = f(x)$ liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$

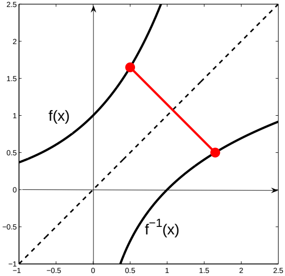
Berechnung der Umkehrfunktion

Buch Kap. 2.1

Algorithmus (Vorschrift zur Vorgehensweise)

Ist $f : A \to B$ bijektiv, so ergibt sich $f^{-1} : B \to A$ durch

1) $y = f(x)$ nach x auflösen $\to x = f^{-1}(y)$,
2) x und y vertauschen $\to y = f^{-1}(x)$.



$y = f^{-1}(x)$ und $y = f(x)$ liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$

Verkettung von Funktionen

Buch Kap. 2.1

Definition 2.3: (Verkettung von Funktionen)

Sind die Funktionen $f : A \to B$ und $g : C \to D$ mit $B \subset C$ gegeben, so ist jedem $x \in A$ durch f das Element $f(x) \in B$ zugeordnet, und diesem durch die Funktion g das Element $g(f(x)) \in D$.
Das Nacheinanderausführen von f und g liefert eine Funktion

$$h = g \circ f : A \to D.$$

Wir nennen $h = g \circ f$ zusammengesetzte oder verkettete Funktion.

Beispiele

Gerade/Ungerade Funktionen

Buch Kap. 2.2

Definition 2.7: (gerade und ungerade Funktionen)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei D symmetrisch zur 0 liege, d.h. mit $x \in D$ sei auch $-x \in D$.
f heißt

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}, \text{ falls } \left\{ \begin{array}{l} f(x) = f(-x) \\ f(x) = -f(-x) \end{array} \right\}$$

für alle $x \in D$ erfüllt ist.

Beispiele

Gerade/Ungerade Funktionen

Buch Kap. 2.2

Fakt

Jede Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit einem um den Punkt $x = 0$ symmetrischen Definitionsbereich D kann man als Summe $f(x) = g(x) + u(x)$ einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion u darstellen, nämlich

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{und} \quad u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

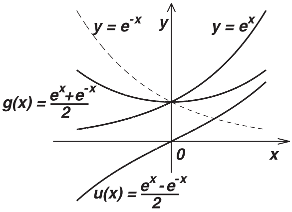
Gerade/Ungerade Funktionen

Buch Kap. 2.2

Fakt

Jede Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit einem um den Punkt $x = 0$ symmetrischen Definitionsbereich D kann man als Summe $f(x) = g(x) + u(x)$ einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion u darstellen, nämlich

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{und} \quad u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$



Monotonie von Funktionen

Buch Kap. 2.2

Definition 2.5: (monoton fallend und steigende Funktion)

f heißt auf dem Intervall $I \subset D$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(streng) monoton steigend} \\ \text{(streng) monoton fallend} \end{array} \right\}, \text{ falls}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x)(<) \leq f(y) \\ f(x)(>) \geq f(y) \end{array} \right\} \text{ für alle } x, y \in I, x < y$$

erfüllt ist.

Beispiele

Periodische Funktionen

Definition 2.8: (periodische Funktion)

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt periodisch, falls eine Zahl $\alpha > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ auch $x + \alpha \in D$ erfüllt ist, sowie

$$f(x + \alpha) = f(x)$$

gilt. Die Zahl α heißt Periode der Funktion f.
Die kleinste Periode einer Funktion f, also

$$\alpha_{min} = \min\{\alpha, \alpha \text{ Periode von } f\}$$

nennt man primitive Periode der Funktion.

Beispiele

Beschränktheit von Mengen

Buch Kap. 2.2

Definition: (Beschränktheit von Mengen)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge. Dann heißt M

$$\left\{\begin{array}{l}\text{nach oben}\\ \text{nach unten}\end{array}\right\}\text{beschränkt, falls }\left\{\begin{array}{c} x \leq o \\ x \geq u \end{array}\right\}\text{ für alle } x \in M$$

gilt mit Konstanten $u, o \in \mathbb{R}$.
M heißt beschränkt, falls es nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiele

Supremum/Infimum

Buch Kap. 2.2

Definition: (Supremum)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Dann bezeichnet $\sup M$ die kleinste obere Schranke von M.

Definition: (Infimum)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt. Dann bezeichnet $\inf M$ die größte untere Schranke von M.

Beachte

- Wir setzen $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = \infty$.
- Wir setzen $\sup M = \infty$, falls M nicht nach oben beschränkt.
- Wir setzen $\inf M = -\infty$, falls M nicht nach unten beschränkt.
- $\sup M$, $\inf M$ existieren immer!

Supremum/Infimum

Beispiele

Beschränktheit von Funktionen

Definition 2.4: (beschränkte Funktion)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion.
f heißt auf der Menge $M \subset D$

- nach oben beschränkt, falls die Menge $f(M)$ nach oben beschränkt ist, also

$$\sup f(M) = \sup\{f(x) \,|\, x \in M\} < \infty.$$

- nach unten beschränkt, falls die Menge $f(M)$ nach unten beschränkt ist, also

$$\inf f(M) = \inf\{f(x) \,|\, x \in M\} > -\infty.$$

- nach beschränkt, falls die Menge $f(M)$ nach oben und unten beschränkt ist,also

$$-\infty < \inf f(M) \ \wedge \ \sup f(M) < \infty.$$

Beschränktheit von Funktionen

Beispiele

Elementare Funktionen

Exponentialfunktion

Buch Kap. 2.3

Exponentialfunktionen

$$f(x) = a^x, \qquad a > 0,\ D = \mathbb{R}.$$

Ist $a = e$ (Eulerzahl $e = 2,71828\ldots$), sprechen wir von der "e-Funktion" $f(x) = e^x$.

Rechenregeln

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
- $(a^x)^y = a^{xy}$,
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

Exponentialfunktion

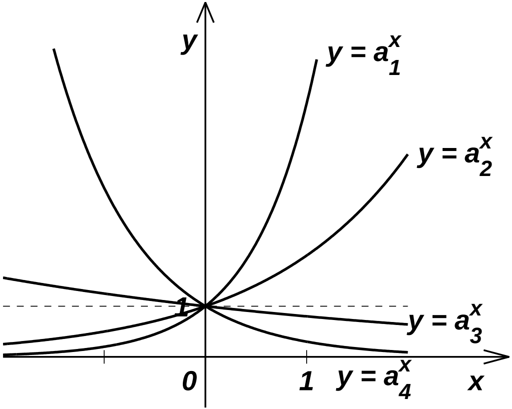


Abbildung 2.11: Exponentialfunktion $y = a^x$ zu Basen a_i
$(0 < a_4 < a_3 < 1 < a_2 < a_1)$

Logarithmus

Logarithmusfunktion

Für $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ ist mit $D = [0, \infty)$

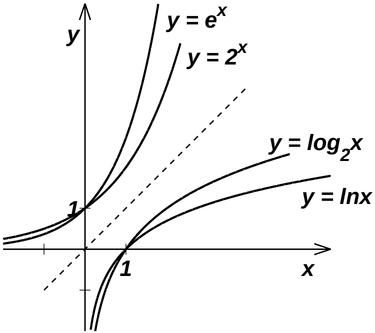
$$f(x) = \log_a x$$

definiert als die Zahl y mit der Eigenschaft $a^y = x$.

Ist $a = e$, so definieren wir

$$\log x = \ln x := \log_e x$$

den natürlichen Logarithmus. Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.



Logarithmus

Buch Kap. 2.3

Rechenregeln

Es gilt

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$;
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;
- $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$;
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, insbesondere

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log y} = \frac{\ln x}{\ln y};$$

- $\log_a(1) = 0$.

Potenzfunktion

Buch Kap. 2.3

Potenzfunktion

$$f(x) = x^{\nu}$$

- $\nu \in \mathbb{N}$: natürlicher Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$;
- $\nu \in \mathbb{Z}$, $\nu < 0$: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $\nu \in \mathbb{R}$: $y = x^{\nu} := e^{\ln x^{\nu}} = e^{\nu \ln x}$, $D = \mathbb{R}_{>0}$.

Die Umkehrfunktionen zu $y = x^{\nu}$, $\nu \neq 0$, sind mit

$$y = x^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{x}$$

wiederum Potenzfunktionen.

Potenzfunktion

Buch Kap. 2.3

Potenzfunktion (Beispiele)

Polynome

Buch Kap. 2.3

Polynome...

sind Summen von Potenzfunktionen mit nichtnegativen Exponenten, d.h.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdot + a_n x^n$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der Grad von p. Wir schreiben

$$n = \mathrm{Grad} p.$$

Gebrochen rationale Funktionen

Buch Kap. 2.3

Gebrochen rationale Funktionen...

... sind Polynombrüche

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)},$$

mit den Polynomen $n-$ten bzw. $m-$ten Grades p_n und q_m. Ist $n < m$, heißt y echt gebrochen rationale Funktion oder echter Polynombruch.

Für $n \geq m$, heißt y unecht gebrochen rationale Funktion. Polynomdivision liefert dann

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = s_{n-m}(x) + r(x),$$

wobei s_{n-m} Polynom vom Grad $n - m$ und r echt gebrochen rational.

Gebrochen rationale Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen (Beispiele)

Polynomdivision

Polynomdivision (Beispiele)

Trigonometrische Funktionen

Buch Kap. 2.3

Sinus, Kosinus, Tangens, Kotangens...

$f(x) = \sin x,\ f(x) = \cos x$, $D = \mathbb{R}$, primitive Periode 2π;
$f(x) = \tan x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$,
$y = \cot x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, primitive Periode π.

Graphen

Trigonometrische Funktionen

Buch Kap. 2.3

Einige Zusammenhänge

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

$f(x) = \sin x,\ f(x) = \cos x$, $D = \mathbb{R}$, primitive Periode 2π;

$f(x) = \tan x,\ D = \mathbb{R} \setminus \{x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$f(x) = \cot x,\ D = \mathbb{R} \setminus \{x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, primitive Periode π.

Trigonometrische Funktionen

Buch Kap. 2.3

Umkehrfunktionen (Arkusfunktionen)

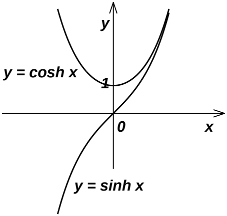
$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $D = [-1, 1]$,
$y = \arctan\ x$, $y = \operatorname{arccot} x$, $D = \mathbb{R}$.

Graphen

Hyperbelfunktionen

Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned}
\sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad D = \mathbb{R},\ W = \mathbb{R},\\
\cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad D = \mathbb{R},\ W = [1, \infty),\\
\tanh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad D = \mathbb{R},\ W = (-1, 1),\\
\coth x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ W = \mathbb{R} \setminus [-1, 1].
\end{aligned}$$



Beachte

- sinh, tanh, coth ungerade,
- cosh gerade.

Areafunktionen

Definition

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen Areafunktionen.

$$y = \operatorname{arsinh} x$$

bezeichnet etwa die Umkehrfunktion von $\sinh x$.

Areafunktionen

Areafunktionen

Alle Areafunktionen lassen sich explizit durch Logarithmusfunktionen ausdrücken. Es gilt z.B.

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Folgen, Reihen und Konvergenz

Buch Kap. 2.4 – Folgen

Definition 2.12: (Zahlenfolge)

Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n = f(n)$, die jeder natürlichen Zahl genau eine reelle Zahl zuordnet, heißt Zahlenfolge.

Bezeichnungen:
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, oder $(a_1, a_2, \ldots)$ oder auch kurz mit (a_n)

a_n heißt das $n-$te Glied der Folge (a_n).

Beispiele

Buch Kap. 2.4 – Folgen

Definition 2.12: (Zahlenfolge)

Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n = f(n)$, die jeder natürlichen Zahl genau eine reelle Zahl zuordnet, heißt Zahlenfolge.

Bezeichnungen:
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, oder $(a_1, a_2, \ldots)$ oder auch kurz mit (a_n)

a_n heißt das $n-$te Glied der Folge (a_n).

Beispiele

Zahlenfolgen

Buch Kap. 2.4

Definition 2.14: (Konvergenz, Limes)

Die Folge (a_n) konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn

"Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N$",

also

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

Notation: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, kurz $\lim a_n = a$.

Beispiele

Definition 2.14: (Konvergenz, Limes)

Die Folge (a_n) konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn

"Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N$",

also

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

Notation: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, kurz $\lim a_n = a$.

Beispiele

Weitere Definitionen

1. Definition 2.15: (a_n) heißt CAUCHY-Folge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall \quad m, n \geq n_0 \quad \text{gilt.}$$

2. Definition 2.17: $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \dots \quad (n_k \in \mathbb{N})$ heißt Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Konvergiert eine Teilfolge gegen ξ, so heißt ξ Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiele

Zahlenfolgen

Vollständigkeitsaxion (Satz 2.3)

(a_n) konvergiert genau dann, wenn (a_n) CAUCHY**-Folge** ist.

Rechnen mit Limes (Satz 2.2)

1. $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$,
2. $\lim \alpha a_n = \alpha \lim a_n$,
3. $\lim(a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n$,
4. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$, falls $b_n \neq 0$ und $\lim b_n \neq 0$,
5. $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim a_n \leq \lim b_n$.

Beispiele

Zahlenfolgen

Buch Kap. 2.4

Weitere Definitionen

1. Eine Folge (a_n) heißt beschränkt, wenn es $A, B \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Satz 2.4 (Eigenschaften beschränkter Folgen nach Bolzano-Weierstraß).
   1. Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt eine konvergente Teilfolge, oder äquivalent, (a_n) besitzt einen Häufungspunkt,
   2. Jede beschränkte monotone Folge (a_n) konvergiert.

Beispiele

Zahlenfolgen

Buch Kap. 2.4

Beispiel

Zahlenfolgen

Buch Kap. 2.4

Konvergenz gegen unendlich

Die Folge (a_n) **konvergiert gegen ∞**, wenn

"Für alle $M > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n > M$ für alle $n \geq N$",

also

$$\forall M > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \quad a_n > M \quad \forall n \geq N.$$

Notation: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$, kurz $\lim a_n = \infty$.

Analoge Definition: (a_n) konvergiert gegen $-\infty$.

Zahlenfolgen

Buch Kap. 2.4

Beispiele

Reihen

Definition (Reihe)

Sei (a_n) eine Folge. Dann heißt (s_n) mit $s_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$ Reihe.

Eine Reihe heißt konvergent, wenn (s_n) konvergent ist. In dem Fall schreiben wir für $s = \lim_{n\to\infty} s_n$

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k .$$

Wir sagen in dem Fall auch, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert.

Frage

Wann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k ?$$

Reihen

Definition (Reihe)

Sei (a_n) eine Folge. Dann heißt (s_n) mit $s_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$ **Reihe**.

Eine Reihe heißt **konvergent**, wenn (s_n) konvergent ist. In dem Fall schreiben wir für $s = \lim_{n\to\infty} s_n$

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Wir sagen in dem Fall auch, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert.

Frage

Wann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k?$$

Notwendig für Konvergenz

Wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

konvergiert, dann $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Satz 3.2 (Monotoniekriterium)

Wenn $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und (s_n) beschränkt, dann (s_n) konvergent.

Satz 3.3 (Cauchy Kriterium):

(s_n) konvergent gdw es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ gibt mit, s.d.

$|\sum_{i=n+1}^{m} a_i| < \epsilon$ für alle $m > n \geq n_\epsilon$ erfüllt ist.

Reihen

Notwendig für Konvergenz

Wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

konvergiert, dann $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Satz 3.2 (Monotoniekriterium)

Wenn $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und (s_n) beschränkt, dann (s_n) konvergent.

Satz 3.3 (Cauchy Kriterium):

(s_n) konvergent gdw es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ gibt mit, s.d.

$|\sum_{i=n+1}^{m} a_i| < \epsilon$ für alle $m > n \geq n_\epsilon$ erfüllt ist.

Reihen

Notwendig für Konvergenz

Wenn
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$
konvergiert, dann $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Satz 3.2 (Monotoniekriterium)

Wenn $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und (s_n) beschränkt, dann (s_n) konvergent.

Satz 3.3 (Cauchy Kriterium):

(s_n) konvergent gdw es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ gibt mit, s.d.
$|\sum_{i=n+1}^{m} a_i| < \epsilon$ für alle $m > n \geq n_\epsilon$ erfüllt ist.

Reihen

Buch Kap. 3.1

Beispiel

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

ist nicht konvergent.

Beispiel

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

ist konvergent.

Reihen

Beispiel

Sei $q \in \mathbb{R}$. Betrachte die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

Satz 3.4 (Leibniz Kriterium)

Sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \ldots .$$

Definition 3.3 (Absolute Konvergenz)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Satz

Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert sie auch.

Satz 3.4 (Leibniz Kriterium)

Sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \ldots .$$

Definition 3.3 (Absolute Konvergenz)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Satz

Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert sie auch.

Satz 3.4 (Leibniz Kriterium)

Sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \dots .$$

Definition 3.3 (Absolute Konvergenz)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Satz

Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert sie auch.

Beispiel

Betrachte die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k} = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots.$$

Reihen

Satz 3.7 (Majorantenkriterium)

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ absolut konvergent und gilt $|b_k| \leq |a_k|$ für alle $k \geq n_0$ mit einem $n_0 \in \mathbb{N}$, so ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent.

Beispiele

Beispiele

Satz 3.11 (Quotienten- und Wurzel-Kriterium)

Betrachte die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$.

- Quotienten-Kriterium: $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$ und $\lim_{k\to\infty, k\geq k_0} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = d < \infty$, oder
- Wurzel-Kriterium: $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = d < \infty$;

dann ist (s_n) absolut konvergent, falls $d < 1$ und divergent, falls $d > 1$.

Reihen

Beispiel

Sei $x \in \mathbb{R}$. Betrachte die Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Folgen und Reihen komplexer Zahlen

Fakt

Die Definition

“Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N$”,

kann ebenso für Folgen komplexer Zahlen verwendet werden.

Es gilt

Die komplexe Folge (a_n) konvergiert gegen $a \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} Re\,(a_n) = Re\,(a), \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} Im\,(a_n) = Im\,(a).$$

Gleiches gilt für Reihen.

Beispiel

Sei $x \in \mathbb{R}$. Betrachte die Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Funktionen und Stetigkeit

Grenzwert von Funktionen

Buch Kap. 2.4

Definition 2.10′: (Grenzwerte einer Funktion)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ gegen g strebt, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D, x_n \neq a$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Definition 2.10′: (linksseitiger Grenzwert)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ von links gegen g strebt, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D, x_n < a$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Definition 2.10′: (rechtsssseitiger Grenzwert)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ von rechts gegen g strebt, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D, x_n > a$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Grenzwert von Funktionen

Definition 2.10′: (Grenzwerte einer Funktion)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ gegen g strebt, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D, x_n \neq a$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Definition 2.10′: (linksseitiger Grenzwert)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ von links gegen g strebt, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D, x_n < a$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Definition 2.10′: (rechtsssseitiger Grenzwert)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ von rechts gegen g strebt, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D, x_n > a$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Grenzwert von Funktionen

Buch Kap. 2.4

Definition 2.10′: (Grenzwerte einer Funktion)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ gegen g strebt, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D, x_n \neq a$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Definition 2.10′: (linksseitiger Grenzwert)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ von links gegen g strebt, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D, x_n < a$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Definition 2.10′: (rechtssseitiger Grenzwert)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ von rechts gegen g strebt, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D, x_n > a$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Grenzwert von Funktionen

Buch Kap. 2.4

Notation

- $g = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ — g Grenzwert
- $g = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$ — g linksseitiger Grenzwert
- $g = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$ — g rechtsseitiger Grenzwert

Beachte: a muss kein Element von D sein, und g muss nicht Element des Wertebereichs der Funktion f sein.

Beispiele

Beispiele

Grenzwert von Funktionen

Buch Kap. 2.4

Bemerkungen zu Definition 2.10′:

- Der Grenzwert einer Funktion an der Stelle $x = a$ existiert genau dann, wenn dort links- und rechtseitiger Grenzwert existieren und gleich sind.
- Die Betrachtung von $\lim_{x \to \infty} f(x)$ und $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ist ebenfalls möglich.

Beispiele

Grenzwert von Funktionen

Buch Kap. 2.4

Bemerkungen zu Definition 2.10′:

- Der Grenzwert einer Funktion an der Stelle $x = a$ existiert genau dann, wenn dort links- und rechtseitiger Grenzwert existieren und gleich sind.
- Die Betrachtung von $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ist ebenfalls möglich.

Beispiele

Grenzwert von Funktionen

Buch Kap. 2.4

Rechenregeln:

Es werden jeweils Grenzwerte für einen der Fälle

$$x \to a, \quad x \to a+0, \quad x \to a-0, \quad x \to \infty, \quad x \to -\infty$$

betrachtet. Falls die entsprechenden Grenzwerte $\lim f$, $\lim g$ und $\lim h$ existieren, gelten die Regeln

(i) $\lim(f+g) = \lim f + \lim g$,

(ii) $\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$,

(iii) $\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$ falls $\lim g \neq 0$,

(iv) $f \leq g \Longrightarrow \lim f \leq \lim g$,

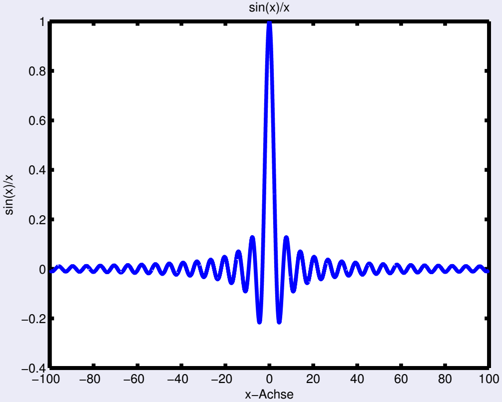
(v) $f \leq g \leq h \wedge \lim f = \lim h = y \Longrightarrow \lim g = y$.

Grenzwert von Funktionen

Beispiel

Was ist

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} \ ?$$



Stetigkeit von Funktionen

Buch Kap. 2.4

Definition 2.18:(Stetigkeit einer Funktion)

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt linksseitig stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt rechtsseitig stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

Stetigkeit von Funktionen

Buch Kap. 2.4

Beispiele

Stetigkeit von Funktionen

Buch Kap. 2.4

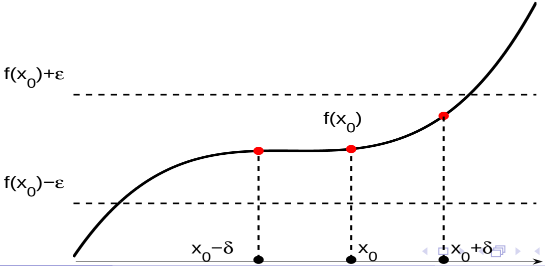
Satz 2.5:($\epsilon - \delta$-Kriterium)

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig im Punkt $x_0 \in D$, genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

gilt, oder kürzer

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \Longrightarrow f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon).$$



Rechenregeln für stetige Funktionen

Sind f und g stetig im Punkt x_0, so sind auch

$$f+g, \quad f-g, \quad f\cdot g \quad \text{und} \quad \frac{f}{g} \quad (\text{falls} \;\; g(x_0)\neq 0)$$

stetig in x_0.

Stetigkeit von Funktionen

Buch Kap. 2.4

Satz 2.8: Verkettung stetiger Funktionen, etc.

- Wenn $f : A \to B$ in x_0 stetig ist, und $g : B \to C$ in $f(x_0)$ stetig ist, dann ist die verkettete Funktion $(g \circ f)(x) = g(f(x)) : A \to C$ stetig in x_0.
- Elementare Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ sind auf jedem Intervall $I \subset D$ stetig. Dabei bezeichnet D den jeweiligen Definitionsbereich der elementaren Funktion, siehe Kap 2.3.
- Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monotone und stetige Funktion und I ein Intervall, dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} stetig auf $D = f(I)$.

Eigenschaften stetiger Funktionen

Buch Kap. 2.5

Satz 2.6: (Nullstellensatz)

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und haben $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen, so besitzt f in (a, b) mindestens eine Nullstelle.

Beweis (Skizze)

Eigenschaften stetiger Funktionen

Buch Kap. 2.5

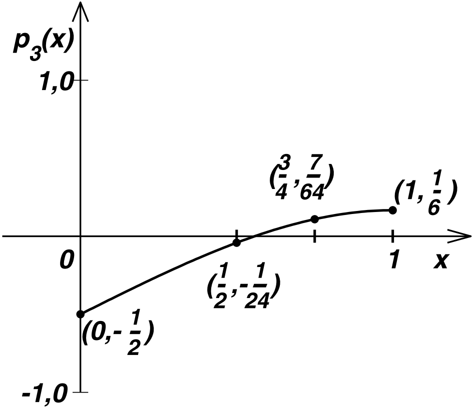


Abbildung 2.27: Bestimmung einer Nullstelle für $p_3(x) = x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}$

Eigenschaften stetiger Funktionen

Buch Kap. 2.5

Satz 2.7: (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\bar{y}$ eine beliebige Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es mindestens ein $\bar{x}$ zwischen a und b mit

$$f(\bar{x}) = \bar{y},$$

d.h. eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert $\bar{y}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis

Extremalstellen

Definition 2.19: (Maximal- und Minimalstelle)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- Gibt es $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \sup_{x \in D} f(x)$, so heißt x_0 Maximalstelle, $f(x_0)$ das Maximum von f. Gibt es ein $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \inf_{x \in D} f(x)$, so heißt x_0 Minimalstelle und $f(x_0)$ Minimum von f.

Satz von Weierstraß

Buch Kap. 2.5

Satz 2.9:(Weierstraß)

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und besitzt Maximum und Minimum, d.h. es existieren Elemente $x_0, x_1 \in [a, b]$ mit

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \text{für alle } x \in [a, b] \, .$$

Jede stetige Funktion nimmt also auf einem abgeschlossenen Intervall Maximum und Minimum an.

Differentiation

Differenzierbarkeit

Buch Kap. 2.6

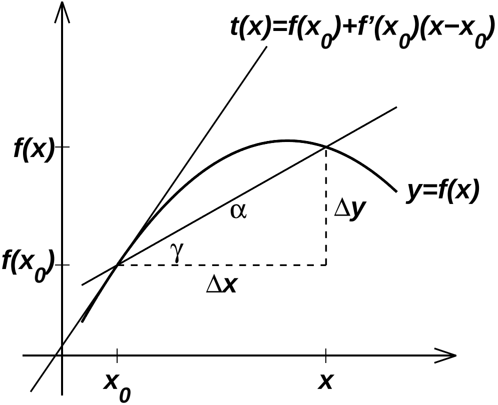


Abbildung 2.30: Sekante und Tangente an f in x_0

Differenzierbarkeit

Definition 2.21: (Differenzierbarkeit)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und I ein Intervall. f heißt **differenzierbar** im Punkt $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert. Der Grenzwert wird mit $f'(x_0)$ (oder $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\frac{df}{dx}|_{x=x_0}$) bezeichnet und Ableitung oder Differentialquotient von f in x_0 genannt.

Beispiele

Differenzierbarkeit

Buch Kap. 2.6

Definition 2.23, 2.26: (Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit auf $I \subset D$)

- Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf dem Intervall $I \subset D$ differenzierbar, wenn f in jedem inneren Punkt von I differenzierbar ist, und in jedem zu I gehörigem Randpunkt einseitig differenzierbar ist.
- Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf dem Intervall $I \subset D$ stetig differenzierbar, falls sie dort differenzierbar ist und die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Differenzierbarkeit

Satz 2.10: (Differenzierbarkeit $\Longrightarrow$ Stetigkeit)

Ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 differenzierbar, so ist sie an der Stelle x_0 auch stetig.

Differenzierbarkeit

Ableitungsregeln

Seien f und g differenzierbare Funktionen. Die Ableitung einer Funktion f wird durch f' bezeichnet.

(i) Ableitung von Summe, Produkt und Quotient
$(f+g)' = f' + g'$
$(c \cdot f)' = cf'$ (c reelle Konstante)
$(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel)
$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, falls $g \neq 0$ (Quotientenregel)

(ii) Kettenregel
$(f \circ g(x))' = (f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

(iii) Ableitung der Umkehrfunktion
Ist $y = f(x)$ bijektiv und differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, dann gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{bzw.} \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Differentiationsregeln für Grundfunktionen Buch Kap. 2.6

- $(x^\nu)' = \nu\, x^{\nu-1}$ $(\nu \in \mathbb{Z})$
- $(\sin x)' = \cos x\ ,\ (\cos x)' = -\sin x$
- $(e^x)' = e^x\ ,\ (a^x)' = a^x \ln a\ (a > 0)$

Beispiele

Beispiele

Höhere Ableitungen

Buch Kap. 2.6

Definition 2.24: (höhere Ableitungen)

- Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf $A \subseteq D$ und habe die Ableitung $g(x) = f'(x)$. Ist $g : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $B \subseteq A$ mit der Ableitung $g'(x) = (f'(x))'$, dann heißt f zweimal differenzierbar und
$$f^{(2)}(x) := g'(x) = (f'(x))'$$
heißt zweite Ableitung der Funktion f.
- Die Differenzierbarkeit der $(n-1)$-ten Ableitung vorausgesetzt, wird analog die n-te Ableitung von f durch
$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$
rekursiv definiert. Für $f^{(n)}(x)$ wird auch $\frac{d^n f}{d\,x^n}(x)$ geschrieben.
- Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt n-mal stetig differenzierbar, falls $f^{(n)} : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Höhere Ableitungen

Buch Kap. 2.6

Beispiele

Lineare Approximation und Differential

Satz 2.12': (Differenzierbarkeit und das lineare Modell)

Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist im Punkt x_0 genau dann differenzierbar, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

gilt, bzw. kürzer mit $k(x) = f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{k(x)}{x - x_0} = 0.$$

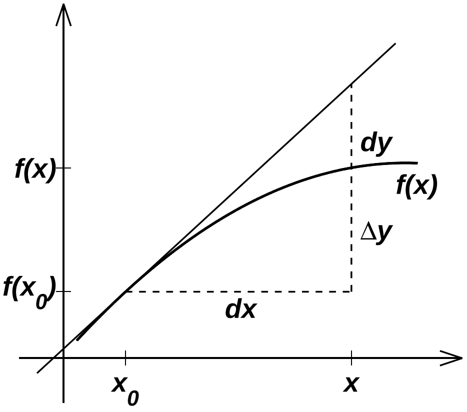
Die Zahl a stimmt mit der Ableitung $f'(x_0)$ an der Stelle x_0 überein, d.m.

$$a = f'(x_0).$$

Lineare Approximation und Differential

Buch Kap. 2.7

Satz 2.12': (Differenzierbarkeit und das lineare Modell)



Eigenschaften differenzierbarer Funktionen Buch Kap. 2.8

Satz 2.14: (notwendige Bedingung für absoluten Extremwert)

Sei $f : I := [a, b] \to \mathbb{R}$ und nehme in $x_0 \in I$ einen absoluten Extremwert an (also Maximum oder Minimum). Falls $f'(x_0)$ in den nachfolgenden Fällen existiert, gilt

- Ist $x_0 \in (a, b)$, so gilt $f'(x_0) = 0$.
- Ist $x_0 = a$, so gilt
  - $f'(x_0) \leq 0$, falls x_0 Maximalstelle,
  - $f'(x_0) \geq 0$, falls x_0 Minimalstelle.
- Ist $x_0 = b$, so gilt
  - $f'(x_0) \geq 0$, falls x_0 Maximalstelle,
  - $f'(x_0) \leq 0$, falls x_0 Minimalstelle.

Kurz
$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0$ für alle $x \in I$ im Fall einer Minimalstelle,
$f'(x_0)(x - x_0) \leq 0$ für alle $x \in I$ im Fall einer Maximalstelle.

Eigenschaften differenzierbarer Funktionen Buch Kap. 2.8

Im Folgenden sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar.

Satz 2.15: (Satz von Rolle)

Gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = 0.$$

Eigenschaften differenzierbarer Funktionen Buch Kap. 2.8

Im Folgenden sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar.

Satz 2.16: (Mittelwertsatz)

Es gibt mindestens ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Eigenschaften differenzierbarer Funktionen Buch Kap. 2.8

Im Folgenden seien $f, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar.

Satz 2.17: (verallgemeinerter Mittelwertsatz)

Es gelte auf (a, b) überall $h'(x) \neq 0$. Dann existiert ein Punkt $x_0 \in]a, b[$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{h'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{h(b) - h(a)}$$

Regeln von l'Hospital

Buch Kap. 2.8

Satz 2.18

Seien $I = (a, b)$, $x_0 \in [a, b]$. $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ seien auf $I \setminus \{x_0\}$ differenzierbar. Weiter sei

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0, \ \infty \text{ oder } -\infty \, .$$

Wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

existiert, so ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \, .$$

Einseitige Grenzwerte für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$ sind eingeschlossen.

Regeln von l'Hospital

Buch Kap. 2.8

Beispiele

Regeln von l'Hospital

Buch Kap. 2.8

Fortsetzung Satz 2.18

Satz von l'Hospital gilt auch für "∞/∞", also

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

$$\text{wenn} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty,$$

Regeln von l'Hospital

Buch Kap. 2.8

Beispiele

Taylor-Polynom

Buch Kap. 2.9

Definition 2.27: (Taylor-Polynom)

Das Polynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

heißt Taylor-Polynom $n-$ten Grades für die Funktion f bei der Entwicklungsstelle x_0.

Taylor-Polynom

Buch Kap. 2.9

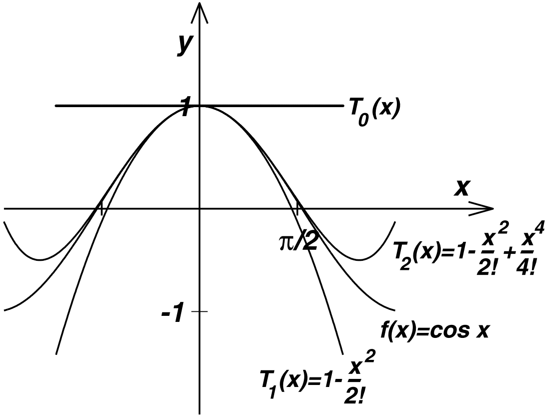


Abbildung 2.36: Taylor-Polynome $T_0(x)$, $T_2(x)$, $T_4(x)$ für die Funktion $\cos x$ bei $x_0 = 0$

Taylor-Polynom

Buch Kap. 2.9

Beispiel

Satz von Taylor

Satz 2.21: (Satz von Taylor)

Sei $I = (a, b)$ und sei der Entwicklungspunkt $x_0 \in I$ gegeben. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)-$mal stetig differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $x \in I$ eine Zahl ξ zwischen x und x_0 derart, dass mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

für die Funktion f die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

gilt. Die Funktion $R_n(x)$ heißt Restglied.

Satz von Taylor

Buch Kap. 2.9

Beispiel

Satz von Taylor

Buch Kap. 2.9

Beispiel

Satz von Taylor

Buch Kap. 2.9

Beispiel

Kurvendiskussion

Umgebung

Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt M Umgebung von x_0, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset M.$$

Beispiele

Umgebung

Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $x_0 \in I$

- lokales Maximum, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass
$$f(x_0) = \max_{x \in U \cap I} f(x);$$
- lokales Minimum, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass
$$f(x_0) = \min_{x \in U \cap I} f(x);$$
- lokales Extremum, wenn es ein lokales Maximum oder lokales Minimum ist.

Extremalprobleme

Satz 2.22: (notwendige Bedingung nach Leibniz), vergl. Satz 2.14

Für jede lokale Extremalstelle x_0 einer differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gilt

$$\text{a)}\quad f'(x_0) = 0 \quad \text{oder} \quad \text{b)}\quad x_0 \text{ ist Randpunkt von } I.$$

Ist x_0 lokale Maximalstelle (Minimalstelle), so gilt

$$f'(x_0)(x - x_0) \leq 0 \ (\geq 0) \text{ für alle } x \text{ in einer Umgebung von } x_0,$$

Extremalprobleme

Satz 2.23: (hinreichende Bedingung für relative Extrema)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von x_0 zweimal stetig differenzierbar. Falls

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0 \; (f''(x_0) < 0)$$

erfüllt ist, dann hat f in x_0 ein relatives Minimum (Maximum).

Extremalprobleme

Buch Kap. 2.10

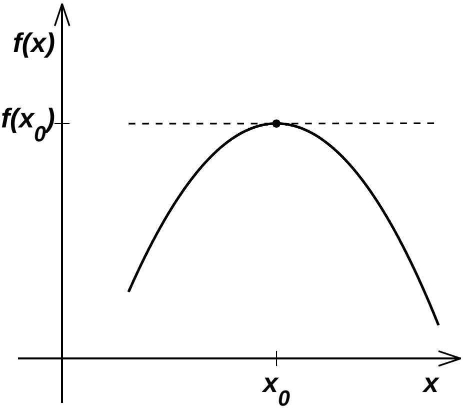


Abbildung 2.38: Maximum bei x_0 (mit $f'' < 0$)

Monotonie

Monotonie

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar un sei $J \subset I$.

- Falls
$$f'(x) \geq (>) 0 \quad \text{für alle} \quad x \in J,$$
dann ist f auf J (streng) monoton wachsend.
- Falls
$$f'(x) \leq (<) 0 \quad \text{für alle} \quad x \in J,$$
dann ist f auf J (streng) monoton fallend.

Links- und Rechtskurven

Links- und Rechtskurven

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und sei $J \subset I$.

- Falls f' auf J monoton fällt, dann macht der Graph von f eine Rechtskurve
$$\Leftarrow f''(x) < 0 \quad \text{für alle} \quad x \in J.$$
- Falls f' auf J monoton wächst, dann macht der Graph von f eine Linkskurve
$$\Leftarrow f''(x) > 0 \quad \text{für alle} \quad x \in J.$$

Wendepunkt

Den Wechsel von Links- auf Rechtskurve oder Rechts- auf Linkskurve in x_0 nennt man Wendepunkt

$$\Rightarrow f''(x_0) = 0.$$

Asymptoten

Asymptoten

Sei f eine Funktion. Eine Gerade $y = \alpha x + \beta$ heißt **Asymptote** von $f(x)$ f"ur $x \to \pm\infty$, falls gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0$$

Kurvendiskussion

Ziel

Feststellung des qualitativen und quantitativen (Werte-)Verhaltens einer gegebenen Funktion f mit Skizze des Graphen von f. Dabei sollen (mindestens) folgende Punkte untersucht werden.

1. Definitionsbereich, Wertebereich
2. Symmetrien
3. Pole
4. Asymptotische
5. Nullstellenbestimmung
6. Bestimmung der (lokalen) Extrema
7. Werteverhalten
8. Bestimmung der Wendepunkte
9. Skizze des Graphen

Kurvendiskussion

Beispiel

Kurvendiskussion

Beispiel

Kurvendiskussion

Beispiel

Kurvendiskussion

Beispiel

Kurvendiskussion

Beispiel

Kurvendiskussion

Beispiel