Beispiele

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots$$

Vorüberlegung: $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Es gilt $\displaystyle\frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$ $\forall\, k \geq 2$ und $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ konv.

$\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konv.

Sei $\ell \geq 2$. Dann ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\ell}$ konv., da $\displaystyle\frac{1}{k^\ell} \leq \frac{1}{k^2}$ $\forall\, \ell \geq 2$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konv.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ (ohne Bew.)

Reihen

Satz 3.11 (Quotienten- und Wurzel-Kriterium)

Betrachte die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$.

- Quotienten-Kriterium: $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$ und $\lim_{k\to\infty, k\geq k_0} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = d < \infty$, oder
- Wurzel-Kriterium: $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = d < \infty$;

dann ist (s_n) absolut konvergent, falls $d < 1$ und divergent, falls $d > 1$.

Betrachte $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}}_{\text{div}} \Rightarrow \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k}{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 1$

Pech gehabt!

$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\text{konv.}} \Rightarrow \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \xrightarrow{k\to\infty} 1$

Beispiel

Sei $x \in \mathbb{R}$. Betrachte die Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

$$a_k = \frac{x^k}{k!} \qquad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|x|^k}{k!}} = \frac{|x|^{k+1}}{|x|^k} \cdot \frac{k!}{(k+1)!}$$

$$= |x| \cdot \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Also konv. nach Quotientenkrit. die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Folgen und Reihen komplexer Zahlen

Fakt

Die Definition

"Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N$",

kann ebenso für Folgen komplexer Zahlen verwendet werden.

Es gilt

Die komplexe Folge (a_n) konvergiert gegen $a \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} Re\,(a_n) = Re\,(a), \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} Im\,(a_n) = Im\,(a).$$

Gleiches gilt für Reihen.