Funktionen und Stetigkeit

Grenzwert von Funktionen

Buch Kap. 2.4

Definition 2.10′: (Grenzwerte einer Funktion)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ gegen g strebt, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D, x_n \neq a$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Definition 2.10′: (linksseitiger Grenzwert)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ von links gegen g strebt, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D, x_n < a$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Definition 2.10′: (rechtsssseitiger Grenzwert)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ von rechts gegen g strebt, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D, x_n > a$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Grenzwert von Funktionen

Buch Kap. 2.4

Definition 2.10′: (Grenzwerte einer Funktion)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ gegen g strebt, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D, x_n \neq a$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Definition 2.10′: (linksseitiger Grenzwert)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ von links gegen g strebt, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D, x_n < a$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Definition 2.10′: (rechtsssseitiger Grenzwert)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ von rechts gegen g strebt, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D, x_n > a$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Grenzwert von Funktionen

Buch Kap. 2.4

Definition 2.10′: (Grenzwerte einer Funktion)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ gegen g strebt, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D, x_n \neq a$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Definition 2.10′: (linksseitiger Grenzwert)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ von links gegen g strebt, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D, x_n < a$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Definition 2.10′: (rechtssseitiger Grenzwert)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ von rechts gegen g strebt, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D, x_n > a$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Grenzwert von Funktionen

Notation

- $g = \lim_{x \to a} f(x)$ — *g* Grenzwert
- $g = \lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x)$ — *g* linksseitiger Grenzwert
- $g = \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x)$ — *g* rechtsseitiger Grenzwert

Beachte: *a* muss kein Element von *D* sein, und *g* muss nicht Element des Wertebereichs der Funktion *f* sein.

Beispiele

$f : (0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 \ \forall x \in (0,1] \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} 1 : & x \geq 0 \\ 0 : & x < 0 \end{cases}$

„Heaviside-Funktion"

$\lim_{x \to 0} h(x)$ ex. nicht, denn $(x_n) = \left((-1)^n \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

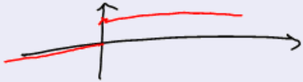
$(h(x_n)) = (0, 1, 0, 1, \dots)$ konv. nicht!

Grenzwert von Funktionen

Buch Kap. 2.4

Beispiele

$$h(x) = \begin{cases} 0: & x < 0 \\ 1: & x \geq 0 \end{cases}$$



$\lim\limits_{x \to 0-} h(x) = 0$, denn für jede Folge (x_n) mit

$x_n < 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ gilt $h(x_n) = 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} h(x_n) = 0$

Ebenso $\lim\limits_{x \to 0+} h(x) = 1$

Für $a < 0$ gilt $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 0 = h(a)$

$a > 0$ gilt $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 1 = h(a)$

Grenzwert von Funktionen

Buch Kap. 2.4

Bemerkungen zu Definition 2.10′:

- Der Grenzwert einer Funktion an der Stelle $x = a$ existiert genau dann, wenn dort links- und rechtseitiger Grenzwert existieren und gleich sind.
- Die Betrachtung von $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ist ebenfalls möglich.

Beispiele

Grenzwert von Funktionen

Bemerkungen zu Definition 2.10′:

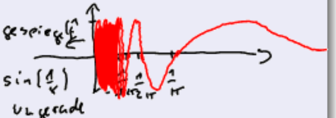
- Der Grenzwert einer Funktion an der Stelle $x = a$ existiert genau dann, wenn dort links- und rechtseitiger Grenzwert existieren und gleich sind.
- Die Betrachtung von $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ist ebenfalls möglich.

Beispiele

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



$\lim\limits_{x\to 0+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ex. nicht, denn für $(x_n) = \left(\frac{2}{n\pi}\right)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \wedge \left(\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)\right) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)\right) = (1, 0, -1, 0, 1, 0, \ldots)$

Rechenregeln:

Es werden jeweils Grenzwerte für einen der Fälle

$$x \to a, \quad x \to a+0, \quad x \to a-0, \quad x \to \infty, \quad x \to -\infty$$

betrachtet. Falls die entsprechenden Grenzwerte $\lim f$, $\lim g$ und $\lim h$ existieren, gelten die Regeln

(i) $\lim(f+g) = \lim f + \lim g$,

(ii) $\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$,

(iii) $\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$ falls $\lim g \neq 0$,

(iv) $f \leq g \Longrightarrow \lim f \leq \lim g$,

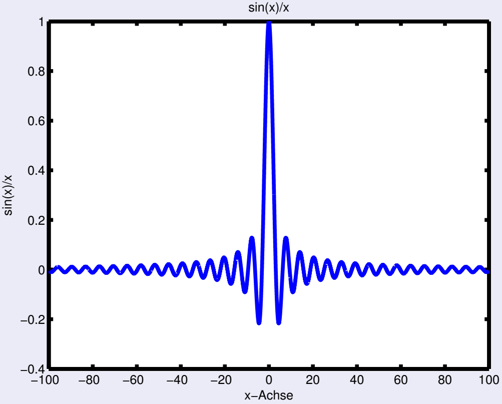
(v) $f \leq g \leq h \wedge \lim f = \lim h = y \Longrightarrow \lim g = y$.

Grenzwert von Funktionen

Beispiel

Was ist

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} \; ?$$



Stetigkeit von Funktionen

Definition 2.18:(Stetigkeit einer Funktion)

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt linksseitig stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt rechtsseitig stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

Beispiele

$$h(x) = \begin{cases} 0 : & x < 0 \\ 1 : & x \geq 0 \end{cases}$$

Für $a > 0$ gilt $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 1 = h(a) \Rightarrow h$ stetig in $a > 0$

Genauso: h stetig in $a < 0$.

$\lim\limits_{x \to 0-} h(x) = 0 \neq 1 = h(0)$. Also ist h nicht linksseitig stetig in 0

(also auch nicht stetig in 0)

$\lim\limits_{x \to 0+} h(x) = 1 = h(0) \Rightarrow h$ rechtsseitig stetig in 0.

Stetigkeit von Funktionen

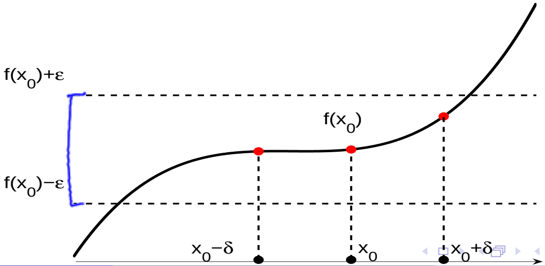
Satz 2.5:($\epsilon - \delta$-Kriterium)

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig im Punkt $x_0 \in D$, genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

gilt, oder kürzer

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \Longrightarrow f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon).$$



Rechenregeln für stetige Funktionen

Sind f und g stetig im Punkt x_0, so sind auch

$$f+g, \quad f-g, \quad f \cdot g \quad \text{und} \quad \frac{f}{g} \quad (\text{falls } \ g(x_0) \neq 0)$$

stetig in x_0.

$f(x) = x$ stetig auf $\mathbb{R}$

$\Rightarrow s(x) = x^n$ stetig auf $\mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Allgemeiner: Polynome sind stetig auf $\mathbb{R}$

Stetigkeit von Funktionen

Buch Kap. 2.4

Satz 2.8: Verkettung stetiger Funktionen, etc.

- Wenn $f : A \to B$ in x_0 stetig ist, und $g : B \to C$ in $f(x_0)$ stetig ist, dann ist die verkettete Funktion $(g \circ f)(x) = g(f(x)) : A \to C$ stetig in x_0.
- Elementare Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ sind auf jedem Intervall $I \subset D$ stetig. Dabei bezeichnet D den jeweiligen Definitionsbereich der elementaren Funktion, siehe Kap 2.3.
- Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monotone und stetige Funktion und I ein Intervall, dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} stetig auf $D = f(I)$.

$f(x) = e^{x^2}$ stetig als Verknüpfung der stetigen Fktn. e^x und x^2.

$\sin(\frac{1}{x})$ ist stetig auf $(0, \infty)$