Regeln von l'Hospital

Fortsetzung Satz 2.18

Satz von l'Hospital gilt auch für "∞/∞", also

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

$$\text{wenn } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty,$$

Regeln von l'Hospital

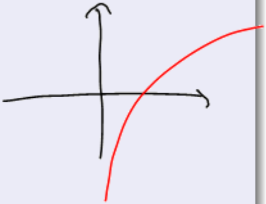
Buch Kap. 2.8

Beispiele

$k \in \mathbb{N}$

a)
$$\lim_{x \to \infty} x^k e^{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^k}{e^x}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{k x^{k-1}}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{k(k-1)\, x^{k-2}}{e^x}$$
$$\vdots$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{k!}{e^x} = 0$$

b)
$$\lim_{x \to 0+} x \ln(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} -x = 0$$



Taylor-Polynom

Buch Kap. 2.9

Definition 2.27: (Taylor-Polynom)

Das Polynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

heißt Taylor-Polynom $n-$ten Grades für die Funktion f bei der Entwicklungsstelle x_0.

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

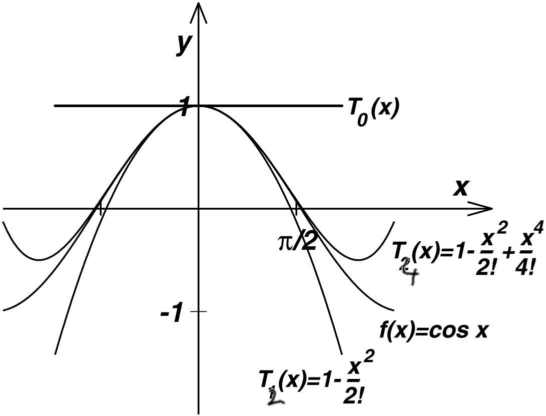


Abbildung 2.36: Taylor-Polynome $T_0(x)$, $T_2(x)$, $T_4(x)$ für die Funktion $\cos x$ bei $x_0 = 0$

Taylor-Polynom

Buch Kap. 2.9

Beispiel

a) $x_0 = 0$, $f(x) = \cos(x)$, $f'(x) = -\sin(x)$, $f''(x) = -\cos(x)$

$f'''(x) = \sin(x)$, $f^{(4)}(x) = \cos(x)$, $f^{(5)} = -\sin(x)$

$f^{(6)}(x) = -\cos(x)$, $f^{(7)}(x) = \sin(x)$ $f^{(8)} = \cos(x)$

$f^{(9)}(x) = -\sin(x)$

$T_0(x) = f(x_0) = \cos(0) = 1$, $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1$

$T_2(x) = T_1(x) + \frac{f''(0)}{2} x^2 = 1 - \frac{x^2}{2}$, $T_3(x) = T_2(x) + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 = 1 - \frac{x^2}{2}$

$T_4(x) = T_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{24} x^4 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, $T_5(x) = T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

$T_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$, $T_7(x) = T_6(x)$,

$T_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320}$

Satz von Taylor

Buch Kap. 2.9

Satz 2.21: (Satz von Taylor)

Sei $I = (a, b)$ und sei der Entwicklungspunkt $x_0 \in I$ gegeben. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)-$mal stetig differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $x \in I$ eine Zahl ξ zwischen x und x_0 derart, dass mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

für die Funktion f die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

gilt. Die Funktion $R_n(x)$ heißt Restglied.

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Beispiel

a) $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x^4 \quad \text{für ein } \xi \text{ zw. } 0 \text{ und } x$$

$$= \frac{\cos(\xi)}{24} x^4 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - T_3(x)| = |R_3(x)|$$

$$= \frac{|\cos(\xi)|\,|x|^4}{24} \leq \frac{|x|^4}{24}$$

Aufgabe: Bestimme $\cos(1)$ bis auf 4 Nachkommastellen

D.h. Finde $n \in \mathbb{N}$ s.d. $|R_n(1)| < \frac{1}{10000}$

$$|R_n(1)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow \text{Bei } n = 7 \text{ gilt } \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{8!} < \frac{1}{10000}$$

$$T_7(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} = \frac{389}{720}. \quad \text{Also } \left|\cos(1) - \frac{389}{720}\right| < \frac{1}{40320}$$

Beispiel

Allgemein: Für n gerade gilt $T_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \cdots \pm \frac{x^n}{n!}$

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Also $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

b) $f(x) = \ln(x)$, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k}$ $\qquad f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}(k-1)!$

$x_0 = 1$

$$T_n(x) = \underbrace{\ln(1)}_{=0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!}(x-1)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k \qquad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n+1)\,\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1}$$

Beispiel

Aufgabe: Bestimme $\ln(2)$ näherungsweise

$$|\ln(2) - T_n(2)| = |R_n(2)| = \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)\,\xi^{n+1}} (2-1)^{n+1} \right| \quad \text{für } \xi \in [1,2]$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{k} \qquad = \frac{1}{(n+1)\,\xi^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{k} = \ln(2)$$

Nebenher: Taylor ergibt

$$\sin(x) = \frac{1}{i}\sinh(ix)$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \cos(x) = \cosh(ix)$$

Kurvendiskussion

Umgebung

Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt M Umgebung von x_0, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset M.$$

Beispiele

$M[0,1]$ ist Umgebung von $\frac{1}{4}$, da $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10000}, \frac{1}{4} + \frac{1}{10000}\right) \subset M$

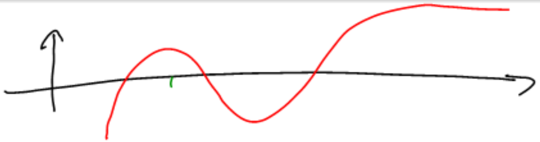
$M = [0,1]$ ist keine Umgebung von 1, da $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \not\subset M$ $\forall \varepsilon > 0$

Umgebung

Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $x_0 \in I$

- lokales Maximum, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass
$$f(x_0) = \max_{x \in U \cap I} f(x);$$
- lokales Minimum, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass
$$f(x_0) = \min_{x \in U \cap I} f(x);$$
- lokales Extremum, wenn es ein lokales Maximum oder lokales Minimum ist.



Extremalprobleme

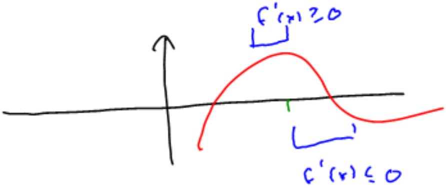
Satz 2.22: (notwendige Bedingung nach Leibniz), vergl. Satz 2.14

Für jede lokale Extremalstelle x_0 einer differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gilt

$$\text{a)}\quad f'(x_0) = 0 \quad \text{oder} \quad \text{b)}\quad x_0 \quad \text{ist Randpunkt von} \quad I.$$

Ist x_0 lokale Maximalstelle (Minimalstelle), so gilt

$$f'(x_0)(x - x_0) \leq 0 \ (\geq 0) \text{ für alle } x \text{ in einer Umgebung von } x_0,$$



Extremalprobleme

Buch Kap. 2.10

Satz 2.23: (hinreichende Bedingung für relative Extrema)

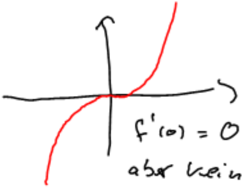
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von x_0 zweimal stetig differenzierbar. Falls

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0 \;(f''(x_0) < 0)$$

erfüllt ist, dann hat f in x_0 ein relatives Minimum (Maximum).

Bspe:

a) $f(x) = x^3$



$f'(0) = 0$, aber kein Extr.

$\rightsquigarrow$ Sattelpunkt

b) $f(x) = x^4$

$f'(0) = f''(0) = 0$, f hat aber bei 0 Min.