Begriff der Funktion

Buch Kap. 2.1

Definition 2.1: Reelle Funktion einer reellen Veränderlichen

Sei $D \subset \mathbb{R}$. Dann heißt eine Abbildung

$$f : D \to \mathbb{R},$$

welche jedem $x \in D$ genau ein $y = f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet, reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen.

Definitionsbereich, Wertebereich, (Ur-)Bildmenge

$D = D(f) \subset \mathbb{R}$ Definitionsbereich von f,

$W = \{y \mid \exists x \in D \text{ mit } y = f(x)\}$ Wertebereich von f.

Sind $A \subseteq \mathbb{R}$ und $B \subseteq \mathbb{R}$, so nennen wir

$f(A) := \{y \in B | \text{ es gibt ein } x \in A \text{ mit } y = f(x)\}$ Bildmenge von A,

$f^{-1}(B) := \{x \in A | f(x) \in B\}$ Urbildmenge von B.

Begriff der Funktion

Buch Kap. 2.1

Definition 2.1: Reelle Funktion einer reellen Veränderlichen

Sei $D \subset \mathbb{R}$. Dann heißt eine Abbildung

$$f : D \to \mathbb{R},$$

welche jedem $x \in D$ genau ein $y = f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet, reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen.

Definitionsbereich, Wertebereich, (Ur-)Bildmenge

$D = D(f) \subset \mathbb{R}$ Definitionsbereich von f,

$W = \{y \,|\, \exists x \in D \text{ mit } y = f(x)\}$ Wertebereich von f.

Sind $A \subseteq \mathbb{R}$ und $B \subseteq \mathbb{R}$, so nennen wir

$f(A) := \{y \in B |$ es gibt ein $x \in A$ mit $y = f(x)\}$ Bildmenge von A,

$f^{-1}(B) := \{x \in A | f(x) \in B\}$ Urbildmenge von B.

Funktion

Beispiele

$f(x) = x$

Begriff der Funktion

Definition 2.1 (Fortsetzung)

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

- injektiv (eineindeutig), falls

$$a \neq a' \Longrightarrow f(a) \neq f(a')$$

- surjektiv (Abbildung auf, $f(A) = B$),

$$\forall b \in B \, \exists \, a \in A : \quad b = f(a).$$

- bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Die Funktionen f und g sind gleich ($f = g$), genau dann, wenn

- $D(f) = D(g)$ und
- $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D(f)$

Begriff der Funktion

Definition 2.1 (Fortsetzung)

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

- injektiv (eineindeutig), falls

$$a \neq a' \Longrightarrow f(a) \neq f(a')$$

- surjektiv (Abbildung auf, $f(A) = B$),

$$\forall b \in B \, \exists \, a \in A : \quad b = f(a).$$

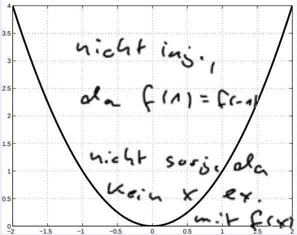
- bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Die Funktionen f und g sind gleich ($f = g$), genau dann, wenn

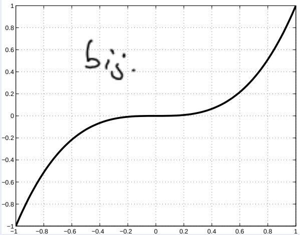
- $D(f) = D(g)$ und
- $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D(f)$

Funktion

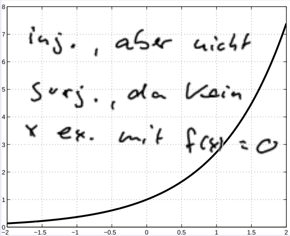
Beispiele



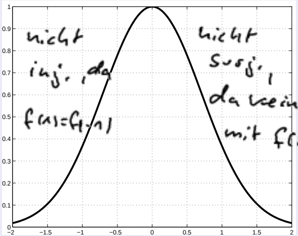
x^2



x^3



e^x



e^{-x^2}

Funktion

Beispiele

$\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht inj., da $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$

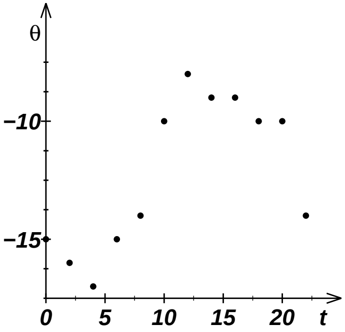
$\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht surj., da kein $x \in \mathbb{R}$ ex. mit $\sin(x) = 2$

$\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ bij.

$\cos: [0, \pi] \to [-1, 1]$ bij.

$e^x: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ bij.

Funktion



Links: Abb. 2.2, Temperaturmessreihe $\theta(t)$ am 5.12.98.
Rechts: Abb. 2.3: Temperaturmessreihe linear interpoliert.

Definition 2.2: (Umkehrfunktion f^{-1})

Ist $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ bijektiv, so ist jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ zugeordnet. Damit ist eine Funktion $f^{-1} : B \to A$ gemäß

$$f^{-1}(y) = x, \quad \text{falls} \quad y = f(x),$$

definiert, welche Umkehrfunktion zu f heißt.

Natürlich ist dann auch $f^{-1} : B \to A$ bijektiv.

Begriff der Funktion

Definition 2.2: (Umkehrfunktion f^{-1})

Ist $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ bijektiv, so ist jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ zugeordnet. Damit ist eine Funktion $f^{-1} : B \to A$ gemäß

$$f^{-1}(y) = x, \quad \text{falls} \quad y = f(x),$$

definiert, welche Umkehrfunktion zu f heißt.

Natürlich ist dann auch $f^{-1} : B \to A$ bijektiv.

Umkehrfunktion

Buch Kap. 2.1

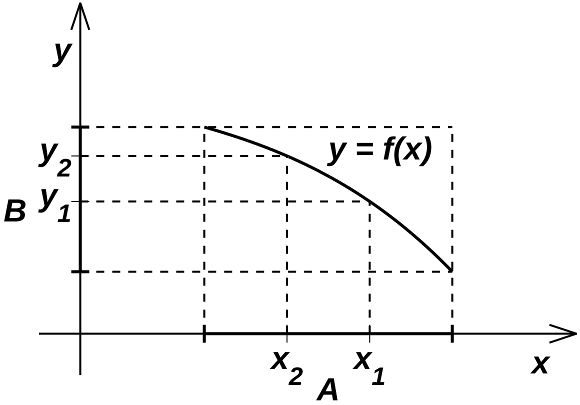


Abbildung 2.4: Die Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = x$ einer bijektiven Funktion $y = f(x)$ ist bijektiv

Umkehrfunktion

Buch Kap. 2.1

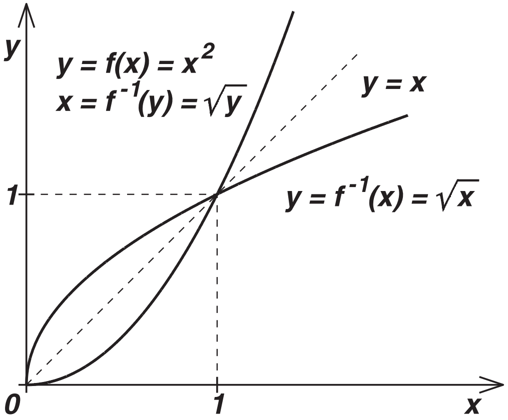


Abbildung 2.5: Umkehrfunktion $y = \sqrt{x}$ zu $y = x^2$, $A = B = \mathbb{R}_{\geq 0}$

Umkehrfunktion

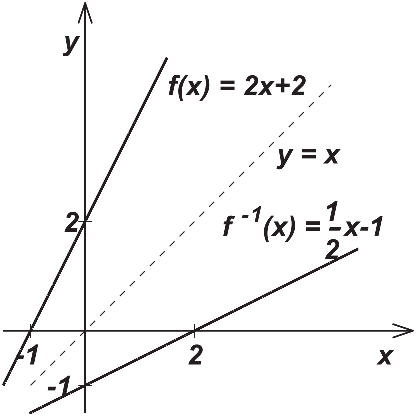


Abbildung 2.6: Funktion und Umkehrfunktion einer linearen Abbildung

Berechnung der Umkehrfunktion

Buch Kap. 2.1

Algorithmus (Vorschrift zur Vorgehensweise)

Ist $f : A \to B$ bijektiv, so ergibt sich $f^{-1} : B \to A$ durch

1) $y = f(x)$ nach x auflösen $\to x = f^{-1}(y)$,
2) x und y vertauschen $\to y = f^{-1}(x)$.

$y = f^{-1}(x)$ und $y = f(x)$ liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$

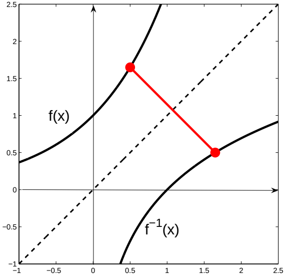
Berechnung der Umkehrfunktion

Buch Kap. 2.1

Algorithmus (Vorschrift zur Vorgehensweise)

Ist $f : A \to B$ bijektiv, so ergibt sich $f^{-1} : B \to A$ durch

1) $y = f(x)$ nach x auflösen $\to x = f^{-1}(y)$,
2) x und y vertauschen $\to y = f^{-1}(x)$.



$y = f^{-1}(x)$ und $y = f(x)$ liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$

Verkettung von Funktionen

Definition 2.3: (Verkettung von Funktionen)

Sind die Funktionen $f : A \to B$ und $g : C \to D$ mit $B \subset C$ gegeben, so ist jedem $x \in A$ durch f das Element $f(x) \in B$ zugeordnet, und diesem durch die Funktion g das Element $g(f(x)) \in D$.
Das Nacheinanderausführen von f und g liefert eine Funktion

$$h = g \circ f : A \to D.$$

Wir nennen $h = g \circ f$ zusammengesetzte oder verkettete Funktion.

Beispiele

$f(x) = e^x \quad , \quad g(x) = x^2$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = e^{x^2}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^x) = (e^x)^2 = e^{2x}$

Gerade/Ungerade Funktionen

Buch Kap. 2.2

Definition 2.7: (gerade und ungerade Funktionen)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei D symmetrisch zur 0 liege, d.h. mit $x \in D$ sei auch $-x \in D$.
f heißt

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}, \text{ falls } \left\{ \begin{array}{l} f(x) = f(-x) \\ f(x) = -f(-x) \end{array} \right\}$$

für alle $x \in D$ erfüllt ist.

Beispiele

$f(x) = x^n$ mit n gerade ist gerade
$f(x) = x^n$ mit n ungerade ist ungerade
sin ungerade
cos gerade , e^x weder gerade noch ungerade.

Gerade/Ungerade Funktionen

Buch Kap. 2.2

Fakt

Jede Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit einem um den Punkt $x = 0$ symmetrischen Definitionsbereich D kann man als Summe $f(x) = g(x) + u(x)$ einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion u darstellen, nämlich

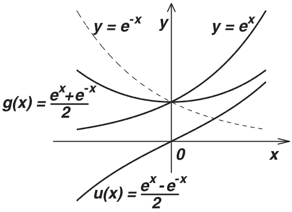
$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{und} \quad u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Gerade/Ungerade Funktionen

Fakt

Jede Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit einem um den Punkt $x = 0$ symmetrischen Definitionsbereich D kann man als Summe $f(x) = g(x) + u(x)$ einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion u darstellen, nämlich

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{und} \quad u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$



Monotonie von Funktionen

Definition 2.5: (monoton fallend und steigende Funktion)

f heißt auf dem Intervall $I \subset D$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(streng) monoton steigend} \\ \text{(streng) monoton fallend} \end{array} \right\}, \text{ falls}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x)(<) \leq f(y) \\ f(x)(>) \geq f(y) \end{array} \right\} \text{ für alle } x, y \in I, x < y$$

erfüllt ist.

Beispiele

$e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ str. mon steigend.

x^2 ist auf $[0, \infty)$ str. mon. steigend

x^2 ist auf $(-\infty, 0]$ str. mon. fallend

x^3 ist auf $\mathbb{R}$ str. mon. steigend

$f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f ist auf $\mathbb{R}$ mon. steigend und mon. fallend

Periodische Funktionen

Buch Kap. 2.2

Definition 2.8: (periodische Funktion)

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt periodisch, falls eine Zahl $\alpha > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ auch $x + \alpha \in D$ erfüllt ist, sowie

$$f(x + \alpha) = f(x)$$

gilt. Die Zahl α heißt Periode der Funktion f.
Die kleinste Periode einer Funktion f, also

$$\alpha_{min} = \min\{\alpha, \alpha \text{ Periode von } f\}$$

nennt man primitive Periode der Funktion.

Beispiele

Sin , cos haben prim. Periode 2π

Beschränktheit von Mengen

Buch Kap. 2.2

Definition: (Beschränktheit von Mengen)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge. Dann heißt M

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{nach oben} \\ \text{nach unten} \end{array} \right\} \text{beschränkt, falls } \left\{ \begin{array}{l} x \leq o \\ x \geq u \end{array} \right\} \text{ für alle } x \in M$$

gilt mit Konstanten $u, o \in \mathbb{R}$.
M heißt beschränkt, falls es nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiele

$\mathbb{R}$ unbeschr.

$[0, \infty)$ nach unten beschr., aber nicht nach oben

$(-\infty, 0)$ nach oben beschr., aber nicht nach unten.

Supremum/Infimum

Buch Kap. 2.2

Definition: (Supremum)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Dann bezeichnet $\sup M$ die kleinste obere Schranke von M.

Definition: (Infimum)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt. Dann bezeichnet $\inf M$ die größte untere Schranke von M.

Beachte

- Wir setzen $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = \infty$.
- Wir setzen $\sup M = \infty$, falls M nicht nach oben beschränkt.
- Wir setzen $\inf M = -\infty$, falls M nicht nach unten beschränkt.
- $\sup M$, $\inf M$ existieren immer!

Supremum/Infimum

Beispiele

$\sup (0,1) = 1 \qquad \inf (0,1) = 0$

Beachte: $\min (0,1)$ ex. nicht
$\max (0,1)$ ex. nicht

$\sup [0,1] = 1 = \max [0,1]$

$\inf \underbrace{\{ \tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}}_{\text{Menge hat kein Minimum}} = 0$

Beschränktheit von Funktionen

Buch Kap. 2.2

Definition 2.4: (beschränkte Funktion)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion.
f heißt auf der Menge $M \subset D$

- nach oben beschränkt, falls die Menge $f(M)$ nach oben beschränkt ist, also

$$\sup f(M) = \sup\{f(x) \,|\, x \in M\} < \infty.$$

- nach unten beschränkt, falls die Menge $f(M)$ nach unten beschränkt ist, also

$$\inf f(M) = \inf\{f(x) \,|\, x \in M\} > -\infty.$$

- nach beschränkt, falls die Menge $f(M)$ nach oben und unten beschränkt ist,also

$$-\infty < \inf f(M) \;\wedge\; \sup f(M) < \infty.$$

Beschränktheit von Funktionen

Beispiele

x^2, e^x nach unten beschr., aber nicht nach oben.

—

sin, cos beschr.

—

x^3 weder nach oben noch nach unten beschr.