**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **WiSe 2018/19**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

# Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 5

**Aufgabe 17:**

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+5}\right)^n$ ,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k2^k}$ ,

c) $\displaystyle\frac{4}{6}+\frac{8}{11}+\frac{12}{16}+\frac{16}{21}+\frac{20}{26}+\cdots$ ,

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$ .

**Aufgabe 18:**

a) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$D_1 = \,]7,10[\;, \quad D_2 = [-4,4]\cup\left\{\frac{9n}{1-2n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\} ,$$
$$D_3 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le y\le 1-x^2\right\} .$$

Für jede Menge gebe man die Menge ihrer Häufungspunkte $D'$ bzw. inneren Punkte $D^0$ an, und kläre, ob die Menge abgeschlossen oder offen ist?

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\ \ln|x|-e^x$ ,

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to -1+}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}$ .

**Aufgabe 19:**

a) Man zeichne die durch

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

gegebene Funktion und überprüfe, ob sie in $x_0 = 0$ stetig ergänzt werden kann.

b) Man zeichne die durch

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 & \text{für} \quad x < -1 \\ 2 & \text{für} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

gegebene Funktion und untersuche mit Hilfe des $\varepsilon$-$\delta$-Kriteriums, ob sie in $x_0 = -1$ stetig ist.

**Aufgabe 20:**

a) Man bestimme eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $f(2) = 5$ und

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -\infty < x < -1\,, \\ -1 & \text{für} \quad -1 < x < 1\,, \\ 2x & \text{für} \quad 1 < x < \infty \end{cases}$$

und zeichne die Funktion. Ist $f$ auch differenzierbar?

b) Für die Funktion $f$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin x\,, & x < \pi \\ ax + b\,, & \pi \leq x \end{cases}$$

bestimme man $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $f$ in $x_0 = \pi$ stetig differenzierbar wird und zeichne $f$.

c) Man berechne die Tangentengleichung zu $f(x) = \ln x$ im Punkt $x_0 = 1$ und fertige eine Zeichnung an.

**Abgabetermin:** 14.1. - 18.1.19 (zu Beginn der Übung)