Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Dr. K. Rothe ©

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 2

Aussagen

Aussagen sind sprachliche Objekte, die einen Sachverhalt ausdrücken, dessen **Wahrheitswert** entweder wahr (=1,=W) oder falsch (=0,=F) ist.

Verknüpfungen von Aussagen durch **Junktoren** (Funktoren) $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$:

$$
\begin{array}{rcl}
A, B & : & \text{Aussagen} \\[1em]
\neg A, \bar{A} & : & \text{Negation, d.h. nicht } A \\[1em]
A \wedge B & : & \text{Konjunktion, d.h. } A \text{ und } B \\
A \vee B & : & \text{Disjunktion, d.h. } A \text{ oder } B \\[1em]
A \Rightarrow B & : & \text{Implikation, d.h. aus } A \text{ folgt } B \\
A \Leftrightarrow B & : & \text{Äquivalenz, d.h. } A \text{ äquivalent } B
\end{array}
$$

Wahrheitswertetafel zu den angegebenen Verknüpfungen:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tautologie: Aussage, deren Wahrheitswert immer richtig ist

Aussageformen und Quantoren

Eine **Aussageform** ist eine Aussage, die von einer oder mehreren Variablen abhängt:
z.B. $A(x) :\Leftrightarrow x^2 - 1 < 0$

Die **Quantoren** $\forall$ und $\exists$:

$\forall x : A(x)$	bedeutet	für alle x gilt $A(x)$.
$\exists x : A(x)$	bedeutet	es gibt (mindestens) ein x, so dass $A(x)$ gilt.

Beweise

Ein **mathematischer Satz** liegt im Allgemeinen in folgender Form vor:

$$A \Rightarrow B\ .$$

A heißt **Voraussetzung** (Prämisse) und B **Behauptung** (Konklusion).

Die Implikation ist dabei in der Regel nicht unmittelbar offensichtlich oder sofort und elementar einsehbar.

Kettenschluss: $A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n$

Ist A_0 richtig, so folgt dass auch A_n richtig ist.

direkter Beweis eines mathematischen Satzes:

Nachweis der Gültigkeit von $A \Rightarrow B$ durch einen Kettenschluss der Form

$$A =: A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n := B$$

Dabei muss jede Implikation $A_i \Rightarrow A_{i+1}$ sofort und elementar einsehbar sein.

indirekter Beweis eines mathematischen Satzes:

a) durch Kontraposition, es gilt nämlich $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
   Nachweis der Gültigkeit von $\neg B \Rightarrow \neg A$ durch einen Kettenschluss der Form
   $$\neg B =: A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n := \neg A$$

b) durch Widerspruch, es gilt nämlich $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
   Nachweis der Ungültigkeit von $A \wedge \neg B$ durch einen Kettenschluss der Form
   $$(A \wedge \neg B) =: A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n \quad \text{(falsche Aussage)}$$

Aufgabe 5:

a) Man zeige, dass folgende Aussage eine Tautologie ist

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)\,.$$

b) Man beweise:
Für reelle Zahlen a, b mit $0 < a < b$ gilt die Ungleichung

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}\,,$$

(i) indirekt und

(ii) direkt.

Lösung:

a)

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

b) Voraussetzung Aussage A: Gegeben seien $a, b > 0$ mit $a < b$.
Behauptung Aussage B:
$\forall\, a, b$, mit A, gilt $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$.

(i) indirekter Beweis:

$$\begin{aligned}
\neg B:&\quad \exists\, a, b \text{ mit A} \;:\; \sqrt{b} - \sqrt{a} \geq \sqrt{b-a}\\
\Rightarrow&\quad \exists\, a, b \text{ mit A} \;:\; b + a - 2\sqrt{ab} \geq b - a\\
\Rightarrow&\quad \exists\, a, b \text{ mit A} \;:\; a \geq \sqrt{ab}\\
\Rightarrow&\quad \exists\, a, b \text{ mit A} \;:\; a^2 \geq ab\\
\Rightarrow&\quad \exists\, a, b \text{ mit A} \;:\; a \geq b \;:\neg\,\text{A}
\end{aligned}$$

(ii) direkter Beweis:

$$\begin{aligned}
A:&\quad 0 < a < b\\
\Rightarrow&\quad \sqrt{a} < \sqrt{b}\\
\Rightarrow&\quad \sqrt{a}\sqrt{a} < \sqrt{a}\sqrt{b}\\
\Rightarrow&\quad 2a < 2\sqrt{ab}\\
\Rightarrow&\quad b + a - 2\sqrt{ab} < b - a\\
\Rightarrow&\quad (\underbrace{\sqrt{b} - \sqrt{a}}_{>0})^2 < \underbrace{b - a}_{>0}\\
\Rightarrow&\quad \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a} \;\; : B.
\end{aligned}$$

Mengen

Definition:

Nach **Cantor** ist eine **Menge** eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte der Anschauung oder des Denkens zu einem Ganzen.

Darstellung einer Menge durch:

a) Aufzählung der Elemente: $A := \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

b) Element, Grundmenge und charakterisierende Eigenschaft:

$$B := \{x \in A \mid x^2 = 1\}$$

Bezeichnungen und Verknüpfungen:

A, B	:	Mengen
$\{\}, \emptyset$	:	leere Menge
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	:	natürliche, ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen
$a \in A$	:	a ist Element von A
$a \notin A$	:	a ist kein Element von A
$A = B$	:	A und B besitzen dieselben Elemente
$A \subseteq B$	:	A ist Teilmenge von B
$A \subset B$	:	A ist echte Teilmenge von B
$A \setminus B$	:	A ohne B (Differenzmenge)
$A \cup B$	:	A vereinigt B (Vereinigungsmenge)
$A \cap B$	:	A geschnitten B (Schnittmenge)
$A \times B$	:	**kartesisches Produkt** von A und B

Euklidische Ebene:

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

dreidimensionaler Raum:

$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}\}$$

Aufgabe 6:

Man stelle die folgenden Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente dar

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 9 < 0\}$,

b) $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \sqrt{4x+20} \leq 6\right\}$,

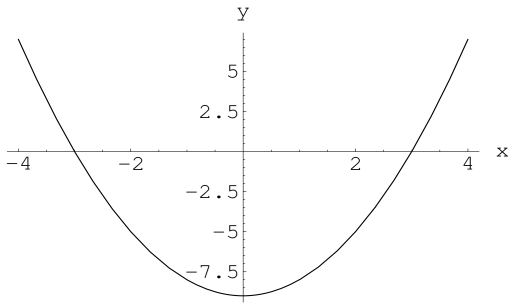
c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq \ln x < 3\}$,

d) Man bilde die Mengen $A \cup B$, $A \cap C$, $C \setminus B$, $(C \setminus B) \cap A$.

Lösung:

a)

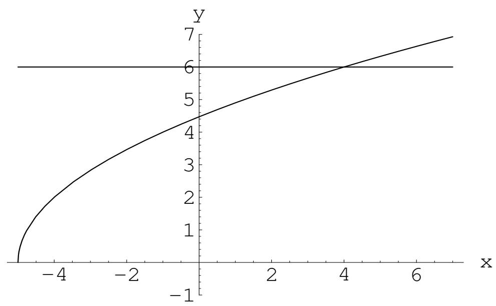
$x^2 - 9 = (x+3)(x-3) = 0$
$\Rightarrow$ Nullstellen $x_1 = -3, x_2 = 3$
$\Rightarrow A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$



$f(x) = x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

b)

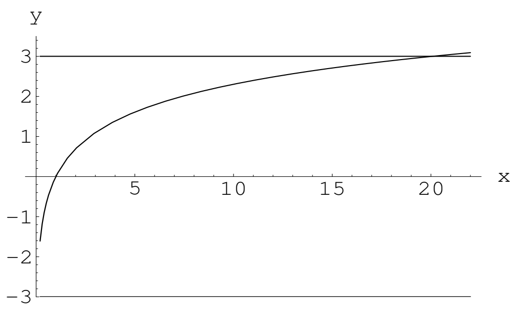
$4x + 20 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$ und
$\sqrt{4x+20} \leq 6 \Rightarrow 4x + 20 \leq 36$
$\Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow$
$B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$



$f(x) = \sqrt{4x+20}$

c)

Da der ln streng monoton wächst, erhält man
$\ln 20 \approx 2.9958 < 3 < \ln 21 \approx 3.045 \Rightarrow$
$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots 19, 20\}$.



$f(x) = \ln x$

d) $A \cup B = B$, $\quad A \cap C = \{1, 2\}$, $\quad C \setminus B = \{5, 6, \cdots 19, 20\}$, $\quad (C \setminus B) \cap A = \emptyset$

Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ können durch folgende Axiome charakterisiert werden.

Axiome von Peano:

a) 1 ist eine natürliche Zahl, d.h. $1 \in \mathbb{N}$.

b) Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' mit $n' = n + 1$.

c) 1 ist kein Nachfolger einer natürliche Zahl, d.h. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \neq 1$.

d) Die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen n und m sind voneinander verschieden, d.h. $n \neq m \Rightarrow n + 1 \neq m + 1$.

e) Es gilt das Induktionsprinzip:

   Für eine Menge A mit $A \subseteq \mathbb{N}$ gelte

   (i) $1 \in A$

   (ii) $n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$.

   Dann folgt $A = \mathbb{N}$.

Beweisprinzip der vollständigen Induktion:

Für die Aussageform $A(n)$ soll Folgendes bewiesen werden:

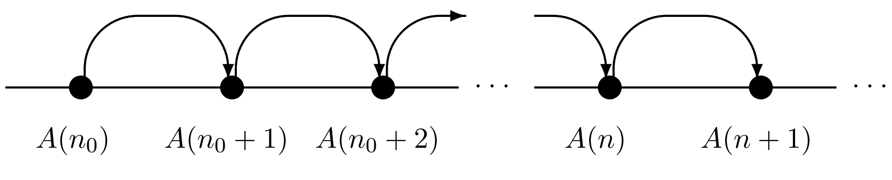
Behauptung: Die Aussage $A(n)$ gelte für alle $n \geq n_0$ mit $n, n_0 \in \mathbb{N}$.

Diese Aussage kann über **vollständige Induktion** bewiesen werden, d.h. kann man die Gültigkeit der folgenden Aussagen a) und b) nachweisen, dann gilt die Behauptung.

a) **Induktionsanfang:** Man zeigt, dass $A(n_0)$ gilt.

b) **Induktionsschritt oder -schluss:**

   Man setzt für ein beliebiges $n \geq n_0$ die Gültigkeit von $A(n)$ voraus (**Induktionsannahme**) und leitet daraus die Gültigkeit von $A(n + 1)$ her.



Aufgabe 7:

Man beweise durch vollständige Induktion

a) für $q \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$,

b) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \geq \frac{1}{n+1}$,

c) $a_n := 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 133 teilbar.

Lösung:

a) Beweis über vollständige Induktion:

$$\begin{aligned}
n = 0: \quad \sum_{k=0}^{0} q^k &= q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q}\,, \\
n \to n+1: \quad \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\
&= \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}\,,
\end{aligned}$$

b) Beweis über vollständige Induktion:

$$n = 1: \quad \frac{1}{2} \geq \frac{1}{1+1}$$

$$\begin{aligned}
n \to n+1: \quad & \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \\
&\geq \frac{n+2}{n+2}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \\
&= \frac{1}{n+2}\cdot\frac{2n^2+5n+2}{2n^2+4n+2} \\
&> \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

c) Mit $a_n := 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ gilt $11^{n+1} = a_n - 12^{2n-1}$.

Beweis über vollständige Induktion:

$$\begin{aligned}
n = 1: \quad a_1 &= 11^2 + 12 = 133 \quad \text{ist durch 133 teilbar,} \\
n \to n+1: \quad a_{n+1} &= 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11\cdot 11^{n+1} + 12^{2n+1} \\
&= 11(a_n - 12^{2n-1}) + 12^2\cdot 12^{2n-1} \\
&= 11a_n + 12^{2n-1}(12^2 - 11) \\
&= 11a_n + 133\cdot 12^{2n-1} \quad \text{ist durch 133 teilbar.}
\end{aligned}$$

Fakultäten und Binomialkoeffizienten

n-Fakultät: $n! \;:=\; \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n & , \quad n \geq 1 \\ 1 & , \quad n = 0 \end{cases}$

Binomialkoeffizienten: $(0 \leq m \leq n)$

$$\binom{n}{m} \;:=\; \frac{n!}{m!(n-m)!} \;=\; \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)}{m!}$$

Eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ wird als **Teiler** von $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet, falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $n = m \cdot k$ gilt.

Menge der **Primzahlen**

$$\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} \mid p > 1 \;,\; p \,\text{besitzt nur die Teiler}\; 1 \;\text{und}\; p\}$$

Satz: Primfaktorzerlegung

Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ lässt sich als Produkt endlich vieler Primzahlpotenzen $p_j^{r_j}$ schreiben:

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k} \;.$$

Diese Darstellung ist für $n > 1$ bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig bestimmt.

größter gemeinsamer Teiler:

Als ggT (n, m) bezeichnet man die größte Zahl der Menge

$$\{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n \text{ und } m\}.$$

kleinstes gemeinsame Vielfaches:

Als kgV (n, m) bezeichnet man die kleinste Zahl der Menge

$$\{k \in \mathbb{N} \mid n \text{ und } m \text{ teilen } k\} \;.$$

Es gilt dann die Beziehung

$$n \cdot m = \mathrm{ggT}(n, m) \cdot \mathrm{kgV}(n, m) \;.$$

Aufgabe 8:

a) Für die Binomialkoeffizienten mit $n, m \in \mathbb{N}$ und $m \leq n$ weise man folgende Beziehungen nach:

$$\binom{n}{m} \cdot \frac{n+1}{m+1} = \binom{n+1}{m+1} .$$

b) Man bestimme für die Zahlen 96135 und 84854 die Primfaktorzerlegung, den ggT und das kgV.

c) Man wandle die rationale Zahl r mit der periodischen Zifferndarstelllung $r = 4.\overline{321}$ um in einen Bruch.

d) Man beweise indirekt, dass $\sqrt{14}$ irrational ist.

Lösung:

a) $$\binom{n}{m} \cdot \frac{n+1}{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{n+1}{m+1} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n+1-(m+1))!} = \binom{n+1}{m+1}$$

b) Primfaktorzerlegung

$96135 = 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29, \quad 84854 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 29$

$\mathrm{ggT}(96135, 84854) = 29$,

$\mathrm{kgV}(96135, 84854) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 29 = 281291010$.

c) $1000r - r = 4321.\overline{321} - 4.\overline{321} = 4317 \ \Rightarrow\ r = \frac{4317}{999} = \frac{1439}{333}$

d) Behauptung: B: $\sqrt{14}$ ist irrational.

$\neg B$: $\sqrt{14}$ ist rational

$\Rightarrow$ $\exists\, m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd (man beachte: $\sqrt{14} > 0$): $\sqrt{14} = \frac{m}{n}$

$\Rightarrow$ $2 \cdot 7 = 14 = \frac{m^2}{n^2}$ (quadrieren)

$\Rightarrow$ $2 \cdot 7 \cdot n^2 = m^2$

$\Rightarrow$ m^2 ist gerade und damit auch m, also $m = 2k$

$\Rightarrow$ $2 \cdot 7 \cdot n^2 = m^2 = (2k)^2 \ \Rightarrow\ 7 \cdot n^2 = 2k^2$

$\Rightarrow$ n^2 ist gerade und damit auch n

Widerspruch zur Teilerfremdheit von n, m

$\Rightarrow$ $\neg B$ ist falsch

$\Rightarrow$ B ist richtig