**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **WiSe 2020/21**
Dr. K. Rothe ©

# Analysis I

# für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 3

**Komplexe Zahlen:**

**Definition**

Für $x, y \in \mathbb{R}$ heißt eine Zahl $z$ mit der Darstellung $z = x + iy$ **komplexe Zahl**. Die **imaginäre Einheit** $i$ wird in der Regel definiert über $i^2 := -1$. Damit löst $i$ die Gleichung $z^2 = -1$ und man verwendet auch die symbolische Bezeichnung $i = \sqrt{-1}$.

Die Menge der komplexen Zahlen wird bezeichnet mit

$$\mathbb{C} \ := \ \{ \, z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \, \} \, .$$

Die Zahlen $x$ und $y$ werden als **kartesische Koordinaten** der Zahl $z$ bezeichnet und in der **komplexen Zahlenebene** in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit **reeller Achse** und **imaginärer Achse** abgetragen.

**Bezeichnungen und Eigenschaften:**

- $x =: \mathrm{Re}\,(z)$ , **Realteil** von $z$,
- $y =: \mathrm{Im}\,(z)$ , **Imaginärteil** von $z$,
- $\bar{z} := x - iy$ , zu $z$ **konjugiert komplexe Zahl**
- $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ , **Betrag** von $z$
- $z = x + iy = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0 \ \wedge \ y = 0$

**Beispiele:**

$$\begin{array}{lll} z = 1 + 4i \, , & \mathrm{Re}\,(z) = 1 \, , & \mathrm{Im}\,(z) = 4 \, , \\ z = 3 - 2.35i \, , & \mathrm{Re}\,(z) = 3 \, , & \mathrm{Im}\,(z) = -2.35 \, , \\ z = 67.3i \, , & \mathrm{Re}\,(z) = 0 \, , & \mathrm{Im}\,(z) = 67.3 \, , \\ z = 42 \, , & \mathrm{Re}\,(z) = 42 \, , & \mathrm{Im}\,(z) = 0 \, . \end{array}$$

**Bemerkung:**

Für Im $(z) = 0$ ist $z = x \in \mathbb{R}$, also gilt $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

**Rechnen mit komplexen Zahlen:**

$$z_1 = x_1 + iy_1 , \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

- **Addition/Subtraktion**

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

- **Multiplikation**

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2)$$

- **Division**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2) \cdot (x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

**Darstellung komplexer Zahlen in Polarkoordinaten**

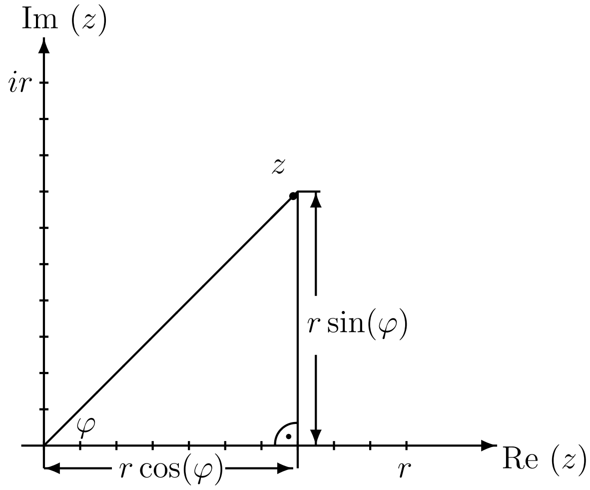
Jeder Punkt $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ der komplexen Zahlenebene kann eindeutig beschrieben werden durch seinen **Abstand**

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (> 0)$$

zum Nullpunkt und durch sein **Argument** $\varphi$, d.h. den Winkel $-\pi < \varphi \leq \pi$ zwischen seinem Ortsvektor (von 0 nach $z$) und der $x$-Achse.

Die Zahlen $r$ und $\varphi$ werden als **Polarkoordinaten** von $z$ bezeichnet. Es besteht also folgender Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten

$$z = x + iy = \underbrace{r\cos\varphi}_{=x} + i\underbrace{r\sin\varphi}_{=y} = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ .$$




Polarkoordinaten von $z$

Wegen $\dfrac{y}{x} = \dfrac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \tan\varphi$ lässt sich der Winkel $\varphi$ aus $x$ und $y$ wie folgt berechnen:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(y/x) + \pi & , \quad x < 0, \quad y \geq 0 \\ \pi/2 & , \quad x = 0, \quad y > 0 \\ \arctan(y/x) & , \quad x > 0, \\ -\pi/2 & , \quad x = 0, \quad y < 0 \\ \arctan(y/x) - \pi & , \quad x < 0, \quad y < 0\,. \end{cases}$$

Mit der abkürzenden Bezeichnung $e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$ (**Eulersche Formel**) gelten für die Polardarstellung $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ die Potenzrechengesetze (ergeben sich aus den Additionstheoremen von Sinus und Kosinus)

$$z_1 z_2 = \left(r_1 e^{i\varphi_1}\right)\left(r_2 e^{i\varphi_2}\right) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\,, \quad z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$$

und die Gleichung $w^n = z = re^{i\varphi}$ besitzt genau die $n$ Lösungen

$$w_k = \sqrt[n]{r}\,e^{i(\varphi+2k\pi)/n}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

**Beispiel:** $w^2 = -1 = e^{i\pi} \quad \Rightarrow \quad w_0 = e^{i\pi/2} = i\,,\ w_1 = e^{3i\pi/2} = e^{-i\pi/2} = -i$

**Aufgabe 9:**

a) Für die Funktion $f$ mit

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x$$

zeichne man den Funktionsgraphen und berechne alle Nullstellen $x \in \mathbb{C}$.

b) Man berechne die folgenden Ausdrücke und gebe sie in kartesischer Darstellung an

(i) $z_1 = 3 - 4i - (5 + 6i)\,,$

(ii) $z_2 = 3i^7 - 2i^5 + 6i^4 + 5i^2 + 4\,,$

(iii) $z_3 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\,,$

(iv) $z_4 = (3 - 4i)(5 + 6i)\,,$

(v) $z_5 = \dfrac{3 - 4i}{5 + 6i}\,.$

c) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 + i\,, \quad z_2 = -1 + i\,, \quad z_3 = i\,.$$

(i) Man berechne

$$\bar{z}_1 + z_2\,, \quad \mathrm{Re}\,(\bar{z}_2 + 3z_3)\,, \quad \mathrm{Im}\,(2z_1 + z_2)\,, \quad |z_1 + z_3|\,.$$

(ii) Man bestimme die Polarkoordinatendarstellung von

$$z_1\,, \quad z_2\,, \quad z_3\,, \quad \bar{z}_1^6\,, \quad z_2^{12}\,, \quad \frac{\bar{z}_1^6 z_3}{z_2^{12}}\,.$$

**Lösung:**

a) Ausklammern ergibt: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x = x(x^2 - 4x + 13)$.
Eine Nullstelle lautet $x_1 = 0$.
Die übrigen erhält man durch quadratische Ergänzung
$0 = x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9$
$\Rightarrow\ (x-2)^2 = -9\ \Rightarrow\ x - 2 = \pm 3i\ \Rightarrow\ x_2 = 2 + 3i\,,\ x_3 = 2 - 3i$

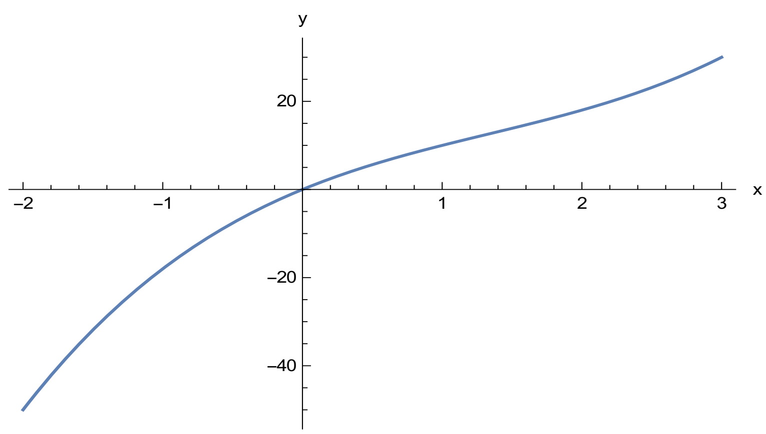



**Bild 9** $\quad f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x$

b) (i) $z_1 = 3 - 4i - (5 + 6i) = -2 - 10i\,,$

(ii) $z_2 = 3i^7 - 2i^5 + 6i^4 + 5i^2 + 4 = -3i - 2i + 6 - 5 + 4 = 5 - 5i\,,$

(iii) $z_3 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(iv) $z_4 = (3 - 4i)(5 + 6i) = 15 + 18i - 20i + 24 = 39 - 2i\,,$

(v) $z_5 = \frac{3 - 4i}{5 + 6i} = \frac{(3 - 4i)(5 - 6i)}{(5 + 6i)(5 - 6i)} = \frac{15 - 18i - 20i - 24}{61} = -\frac{9}{61} - i\frac{38}{61}\,.$

c) (i) $\bar{z}_1 + z_2 = 1 - i - 1 + i = 0\,,$

$\mathrm{Re}\,(\bar{z}_2 + 3z_3) = \mathrm{Re}\,(-1 - i + 3i) = \mathrm{Re}\,(-1 + 2i) = -1\,,$

$\mathrm{Im}\,(2z_1 + z_2) = \mathrm{Im}\,(2 + 2i - 1 + i) = \mathrm{Im}\,(1 + 3i) = 3\,,$

$|z_1 + z_3| = |1 + i + i| = |1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}\,.$

(ii) Polarkoordinatendarstellung: $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi \le \pi$

$z_1 = 1 + i: \quad r = |z_1| = \sqrt{2}\,, \quad \varphi = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad z_1 = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$

$z_2 = -1 + i: \; r = |z_2| = \sqrt{2}\,, \; \varphi = \pi + \arctan\frac{1}{-1} = \pi - \frac{\pi}{4} \; \Rightarrow \; z_2 = \sqrt{2}e^{3\pi i/4}$

$z_3 = i: \quad r = |z_3| = 1\,, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad z_3 = e^{\pi i/2}$

$\bar{z}_1^6 = \left(\sqrt{2}e^{-\pi i/4}\right)^6 = 2^3 e^{-6\pi i/4} = 2^3 e^{-3\pi i/2} = 2^3 e^{\pi i/2}$

$z_2^{12} = \left(\sqrt{2}e^{3\pi i/4}\right)^{12} = 2^6 e^{9\pi i} = 2^6 e^{\pi i}$

$\frac{\bar{z}_1^6 z_3}{z_2^{12}} = \frac{2^3 e^{\pi i/2} e^{\pi i/2}}{2^6 e^{\pi i}} = \frac{2^3 e^{\pi i/2 + \pi i/2}}{2^6 e^{\pi i}} = \frac{e^{\pi i}}{2^3 e^{\pi i}} = \frac{1}{8}\,.$

# Funktionen

Eine reellwertige **Funktion** (oder **Abbildung**) $f$ einer reellen Veränderlichen $x$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D \subset \mathbb{R}$ des **Definitionsbereiches** $D$ genau eine reelle Zahl $f(x) \in W \subset \mathbb{R}$ aus dem **Wertebereich** $W$ zuordnet:

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow W \\ x &\mapsto f(x)\,. \end{aligned}$$

Andere Bezeichnungen für $D$ bzw. $W$ sind **Urbildbereich** bzw. **Bildbereich**.

**Funktionsgraph** von $f$: $\quad \mathrm{graph}(f) := \{(x,y) \in D \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$.

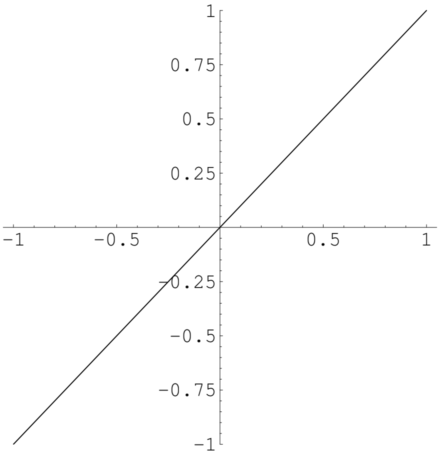



**Bild 1:** $f(x) = x$

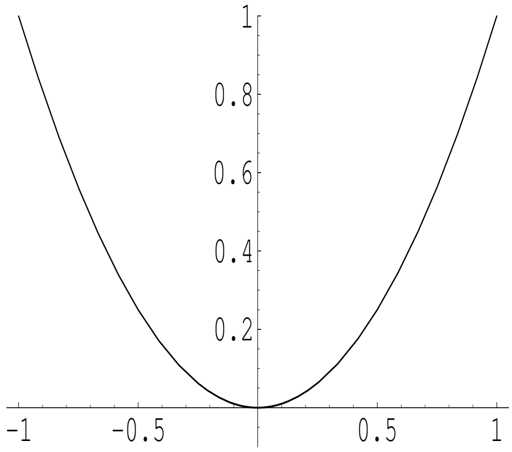



**Bild 2:** $f(x) = x^2$

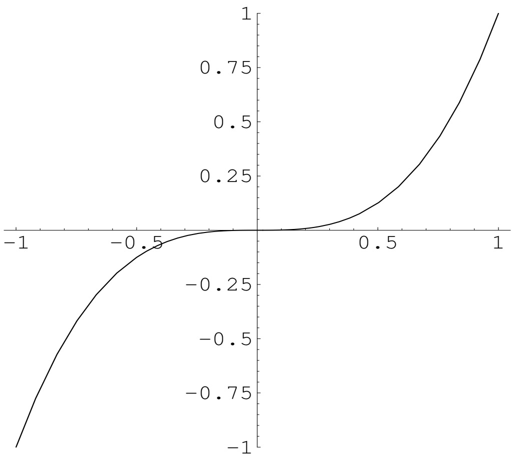



**Bild 3:** $f(x) = x^3$

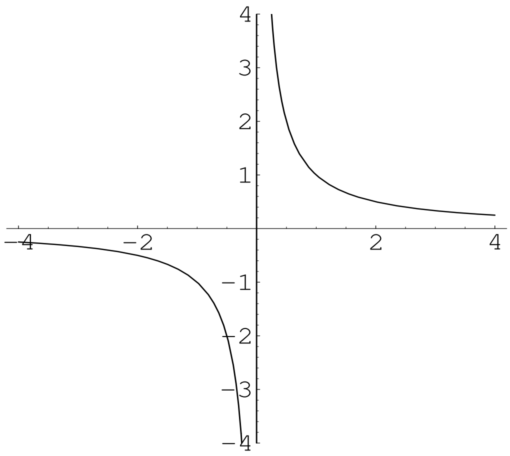



**Bild 4:** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

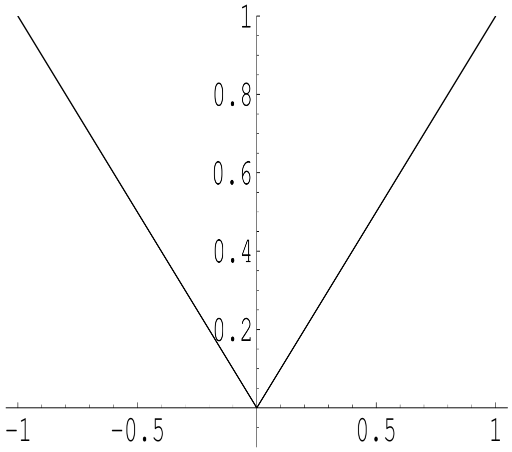



**Bild 5:** $f(x) = |x|$

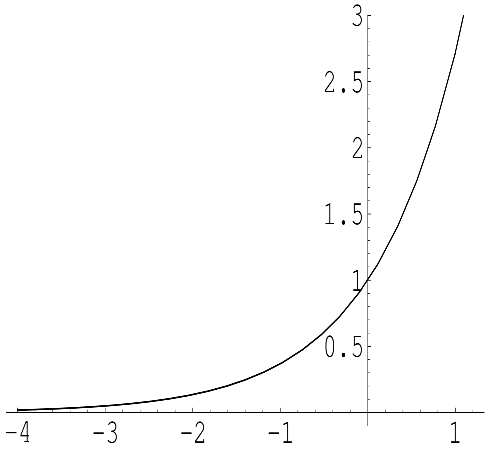



**Bild 6:** $f(x) = e^x$

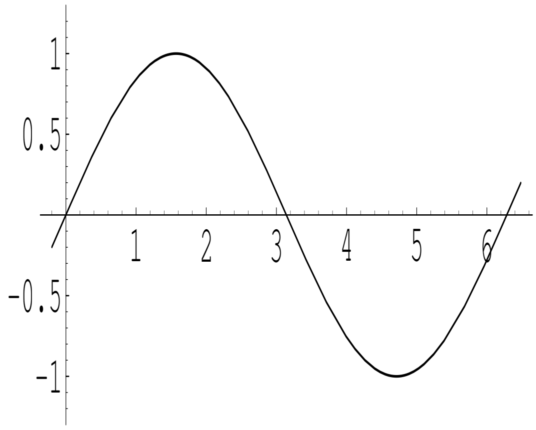



**Bild 7:**
$f(x) = \sin x$

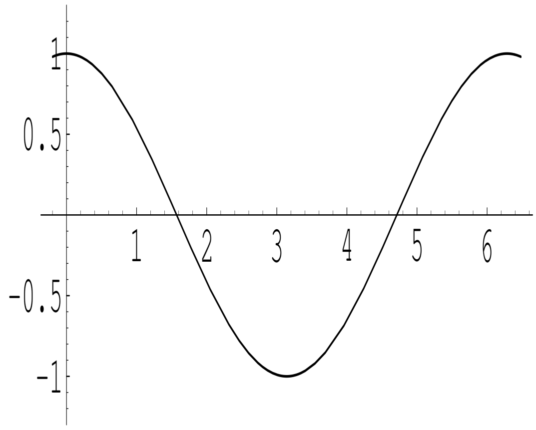



**Bild 8:**
$f(x) = \cos x$

Eine Funktion $f$ heißt **surjektiv**, wenn es für jedes $y \in W$ wenigstens ein $x \in D$ gibt, so dass gilt $y = f(x)$.

Eine Funktion $f$ heißt **injektiv**, wenn es für jedes $y \in W$ höchstens ein $x \in D$ gibt, so dass gilt $y = f(x)$.

Eine Funktion $f$ heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist, d.h. zu jedem $y \in W$ gibt es genau ein $x \in D$. Damit ist die Funktion $f$ dann umkehrbar, mit

**Umkehrfunktion:**

$$\begin{aligned} f^{-1} : W &\rightarrow D \\ y &\mapsto x = f^{-1}(y) \,. \end{aligned}$$

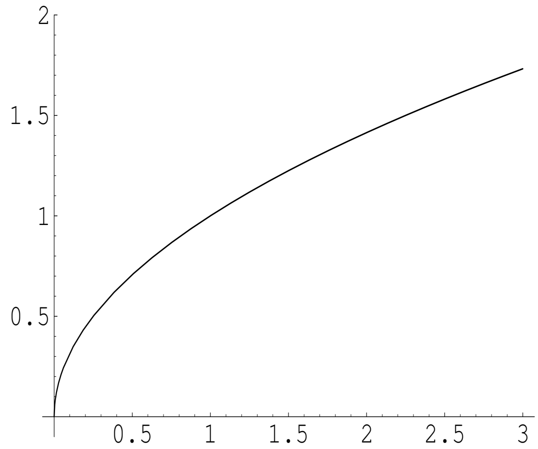



**Bild 9:**
$g(x) = \sqrt{x}$

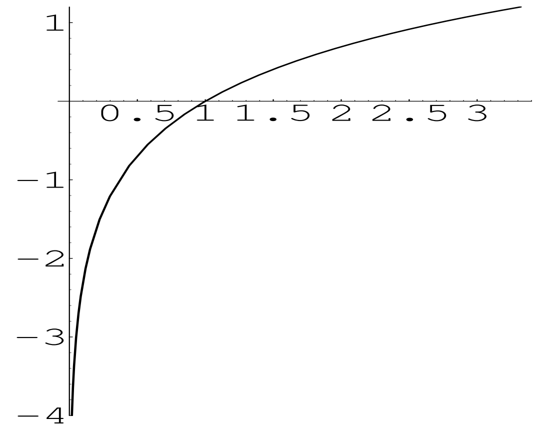



**Bild 10:**
$g(x) = \ln x$

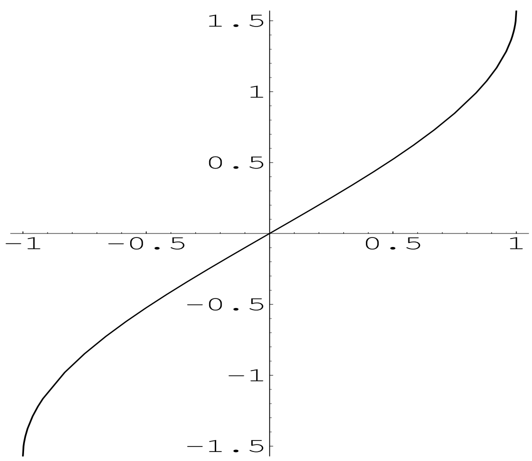



**Bild 11:**
$g(x) = \arcsin x$

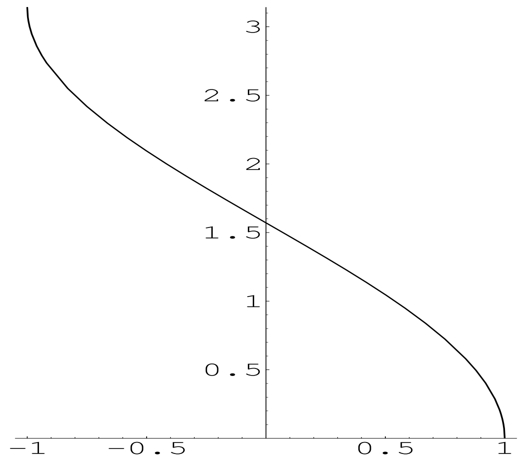



**Bild 12:**
$g(x) = \arccos x$

**Aufgabe 10:**

a) Für die Funktion

$$f : ]-\infty, c] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad y = f(x) := x^2 + 8x + 15$$

bestimme man die größte Zahl $c$, so dass $f$ eine Umkehrfunktion $f^{-1}$ besitzt. Man berechne die Umkehrfunktion, gebe deren Definitions- und Wertebereich an und zeichne den Funktionsgraphen von $f^{-1}$.

b) Man entscheide, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen:

(i) $f_1 : [-5, 5] \to [-2, 2]$, $\quad f_1(x) = 1 - |2 - |x||$,

(ii) $f_2 : [0, 1] \to [0, 2]$, $\quad f_2(x) = x^4$,

(iii) $f_3 : [0, \pi/2] \to [0, 1/2]$, $\quad f_3(x) = \sin x \cos x$,

(iv) $f_4 : \mathbb{R} \to ]0, \infty[$, $\quad f_4(x) = e^x$.

**Lösung:**

a) Mit quadratischer Ergänzung erhält man die Scheitelpunktform von $f$

$$f(x) = x^2 + 8x + 15 = (x+4)^2 - 1$$

mit dem Scheitelpunkt $S = (x_s, f(x_s)) = (-4, -1)$.

Damit ist $]-\infty, c] = ]-\infty, x_s] = ]-\infty, -4]$ das größte Intervall in dem $f$ invertierbar ist.

Berechnung der Umkehrfunktion

$$y = (x+4)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad x = -4 \pm \sqrt{y+1} \le -4 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y) = -4 - \sqrt{y+1}\,.$$

Definitionsbereich $D_{f^{-1}} = [-1, \infty[$, Wertebereich $W_{f^{-1}} = ]-\infty, -4]$.

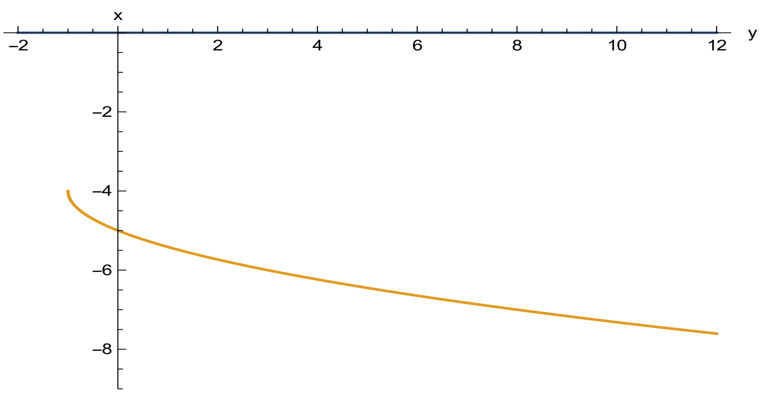



**Bild 10.1** $\quad f^{-1}(y) = -4 - \sqrt{y+1}$

b) (i) $f_1$ ist weder injektiv noch surjektiv

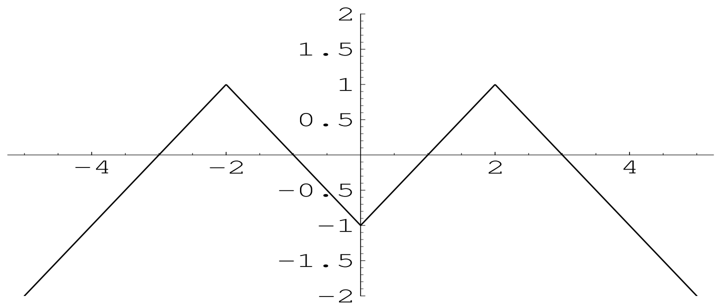



**Bild 10.2** $f_1(x) = 1 - |2 - |x||$

(ii) $f_2$ ist injektiv aber nicht surjektiv

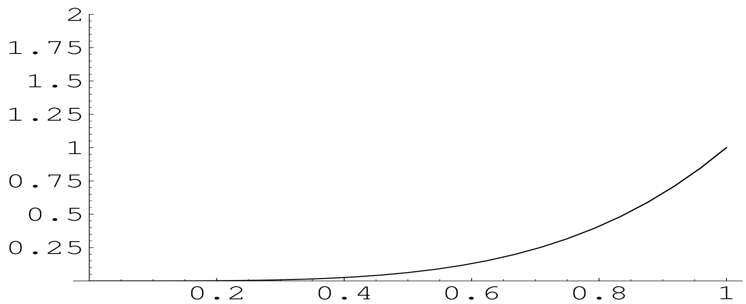



**Bild 10.3** $f_2(x) = x^4$

(iii) $f_3$ ist surjektiv aber nicht injektiv

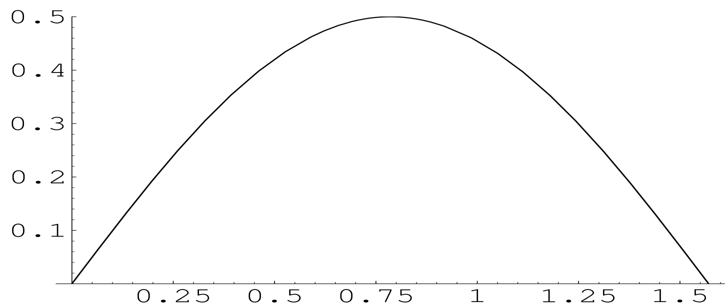



**Bild 10.4** $f_3(x) = \sin x \cos x = \dfrac{1}{2} \sin 2x$

(iv) $f_4$ ist bijektiv

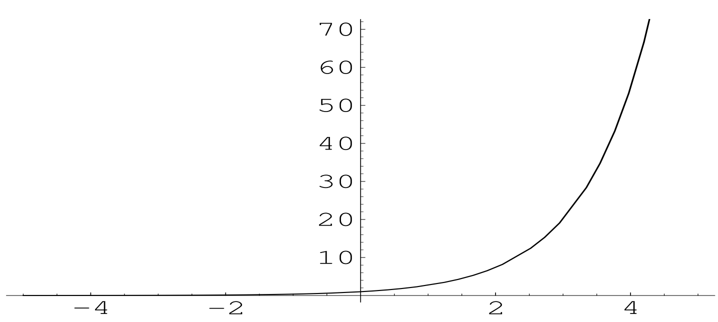



**Bild 10.5** $f_4(x) = e^x$

Gegeben sei eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto y = f(x)$.

**Beschränktheit von Funktionen**

Gibt es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in D$ gilt

a) $|f(x)| \le K$, dann heißt $f$ **beschränkt** in $D$,

b) $f(x) \le K$, dann heißt $f$ **nach oben beschränkt** in $D$,

c) $K \le f(x)$, dann heißt $f$ **nach unten beschränkt** in $D$.

**Monotonie bei Funktionen**

Gilt für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$

a) $f(x_1) < f(x_2)$, dann heißt $f$ **streng monoton wachsend** in $D$,

b) $f(x_1) \le f(x_2)$, dann heißt $f$ **monoton wachsend** in $D$.

Bei Umkehrung der Ungleichung $(>, \ge)$ spricht man von **(streng) monoton fallend**.

**Kriterium für eine Umkehrfunktionen:**

Ist $f$ im Intervall $[a, b]$ streng monoton, dann ist $f : [a, b] \to f([a, b])$ bijektiv und besitzt in $[a, b]$ eine Umkehrfunktion.

**Konvexität bei Funktionen**

Gilt für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ und alle $\alpha$ mit $0 < \alpha < 1$

a) $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$, dann heißt $f$ **streng konvex** in $D$,

b) $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$, dann heißt $f$ **konvex** in $D$.

Bei Umkehrung der Ungleichung $(>, \ge)$ spricht man von **(streng) konkav**.

**Symmetrie bei Funktionen**

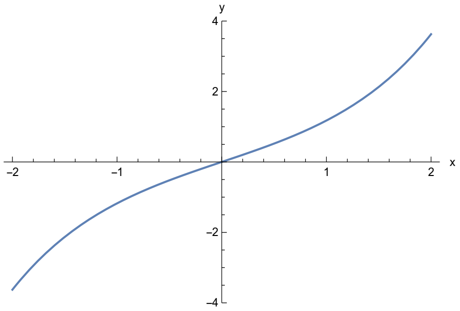
Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt folgende Symmetrien, wenn für alle $x \in D$ gilt

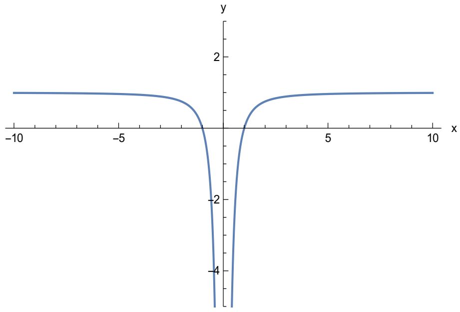
$f(-x) = f(x)$, dann heißt $f$ **gerade**,

$f(-x) = -f(x)$, dann heißt $f$ **ungerade**.

**Aufgabe 11:**

Zu den Abbildungsvorschriften $f(x)$ und $g(x)$ seien die folgenden Funktionsgraphen gegeben:




$f(x) =?$ $\qquad$ $g(x) =?.$

a) Man begründe, welche der Abbildungsvorschriften

$$f_1(x) = x + x^3\ , \quad f_2(x) = 1 - \frac{1}{x^2}\ , \quad f_3(x) = \sinh x\ , \quad f_4(x) = \ln(|x|)$$

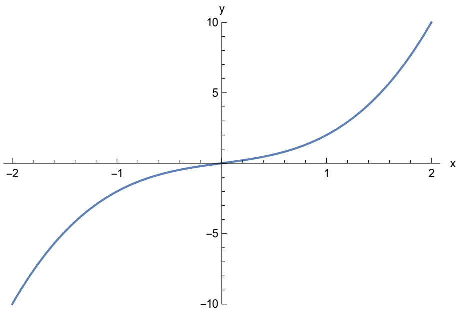
mit $f(x)$ und welche mit $g(x)$ übereinstimmt.

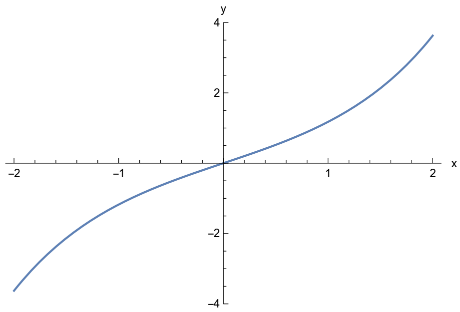
b) Man untersuche, ob es sich bei $f$ und $g$ um gerade, ungerade oder beschränkte Funktionen handelt.

c) Anhand der Funktionsgraphen von $f$ und $g$ gebe man die Bereiche an, in denen die Funktion monoton wächst oder fällt und konkav oder konvex (von unten) ist.

**Lösung:**

a) Aus dem Funktionsgraph von $f(x)$ folgt, dass $f$ ungerade ist.



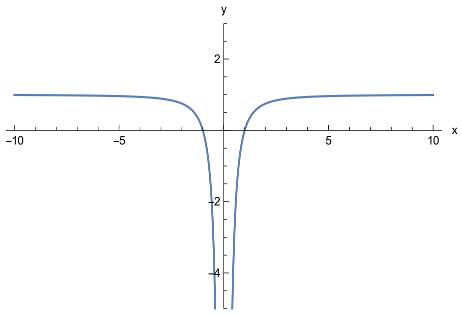




$f_1(x) = x + x^3$ $\qquad$ $f(x) = f_3(x) = \sinh x.$

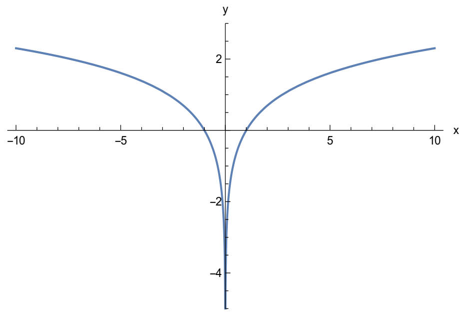
Damit kommen nur die ungeraden Funktionen $f_1$ und $f_3$ in Frage.

Es gilt $f_1(2) = 10 > f(2)$. Damit muss $f(x) = f_3(x) = \sinh x$ gelten.

Aus dem Funktionsgraph von $g(x)$ folgt, dass $g$ gerade ist.




$$g(x) = f_2(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$




$$f_4(x) = \ln(|x|)$$

Damit kommen nur die geraden Funktionen $f_2$ und $f_4$ in Frage.

Es gilt $f_4(5) > 1 > g(5)$. Damit muss $g(x) = f_2(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ gelten.

b) $f$ ist unbeschränkt.
$f$ ist im Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ ungerade,
denn dort gilt

$$f(-x) = \sinh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = -f(x).$$

$g$ ist im Definitionsbereich $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ nach oben beschränkt:

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} < 1.$$

$g$ ist in $D$ gerade, denn es gilt $g(-x) = 1 - \dfrac{1}{(-x)^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2} = g(x)$.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ wächst $f$ streng monoton.
In $]-\infty, 0]$ ist $f$ streng konkav von unten und
in $[0, \infty[$ streng konvex von unten.

Im Intervall $]-\infty, 0[$ fällt $g$ streng monoton und ist streng konkav von unten.
Im Intervall $]0, \infty[$ wächst $g$ streng monoton und ist streng konkav von unten.

**Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus**

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad , \quad x \mapsto y = \exp(x) = e^x$$

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad , \quad y \mapsto x = \ln(y)$$

Der natürliche Logarithmus ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion:

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y \,, \quad y = e^{\ln y} \,, \quad x = \ln(e^x) \,, \quad \ln(1) = 0 \,, \quad \ln(e) = 1 \,.$$

**Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus**

Aus der Funktionalgleichung $e^x e^y = e^{x+y}$ der Exponentialfunktion und $(e^x)^a = e^{ax}$ mit $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich:

$$\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \cdot y) \,, \quad \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) \,, \quad \ln(x^a) = a\ln(x) \,.$$

**gebrochen rationale Funktionen**

Eine Funktion, die sich als Bruch zweier Polynome schreiben lässt

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0},$$

heißt **gebrochen rationale Funktion**. Gilt Zählergrad $n$ größer oder gleich Nennergrad $m$, so kann von $f$ durch **Polynomdivision** ein Polynom $\tilde{p}$ vom Grad $n - m$ abgespalten werden. Für den Grad des Rest-Zählerpolynoms $r_k$ gilt $k < m$

$$f(x) = \tilde{p}(x) + \frac{r_k(x)}{q_m(x)} \,.$$

**Aufgabe 12:**

a) Man vereinfache die folgende Abbildungsvorschrift

$$f(x) = \ln \frac{x^2 + 4x + 4}{x} - \ln(x + 2) + \ln(x) \,.$$

b) Für die unecht gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 31}{x^2 + 6x + 11} \,.$$

spalte man den polynomialen Anteil durch Polynomdivision ab.

c) Mit Hilfe der Eulerschen Formel und unter Verwendung von $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ bestätige man die Gültigkeit der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x\,, \\ \sin 3x &= 3\sin x - 4\sin^3 x\,. \end{aligned}$$

**Lösung:**

a)
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\frac{x^2+4x+4}{x} - \ln(x+2) + \ln(x) \\ &= \ln(x^2+4x+4) - \ln(x) - \ln(x+2) + \ln(x) \\ &= \ln(x+2)^2 - \ln(x+2) \\ &= 2\ln(x+2) - \ln(x+2) = \ln(x+2)\,. \end{aligned}$$

b)
$$(x^3+3x^2-3x-31) : (x^2+6x+11) = x - 3 + \frac{4x+2}{x^2+6x+11}$$

$$\begin{array}{rrrr} -(x^3 & +6x^2 & +11x) & \\ \hline & -3x^2 & -14x & -31 \\ & -(-3x^2 & -18x & -33) \\ \hline & & 4x & +2 \end{array}$$

c) Mit der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ erhält man

$$\begin{aligned} \cos 3x + i\sin 3x &= e^{i3x} = \left(e^{ix}\right)^3 = (\cos x + i\sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x \\ &= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)\,. \end{aligned}$$

Mit einem Koeffizientenvergleich und $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x \\ &= \cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x) \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\,, \\[1em] \sin 3x &= 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x \\ &= 3(1-\sin^2 x)\sin x - \sin^3 x \\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x\,. \end{aligned}$$