Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Dr. K. Rothe ©

Analysis I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 4

Häufungspunkte und Grenzwerte von Funktionen

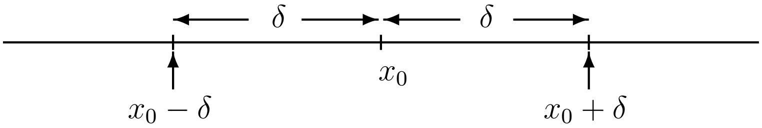
Definition:

Gegeben sei eine Teilmenge D der reellen Zahlen, also $D \subset \mathbb{R}$.

a) Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ heißt

$$U_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

δ-Umgebung von x_0.



b) $x_0 \in D$ heißt **innerer Punkt** von D, falls es eine δ-Umgebung von x_0 gibt, für die $U_\delta(x_0) \subset D$ gilt.

c) D heißt **offen**, falls D nur aus inneren Punkten besteht, d.h. für alle $x \in D$ gibt es eine δ-Umgebung von x mit $U_\delta(x) \subset D$.

d) $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** einer Menge D, falls es für jede δ-Umgebung $U_\delta(x_0)$ von x_0 mindestens einen Punkt $\tilde{x} \neq x_0$ mit $\tilde{x} \in U_\delta(x_0) \cap D$ gibt.

e) Man bezeichne mit D^0 die **Menge der inneren Punkte** und mit D' die **Menge der Häufungspunkte** von D.

f) x_0 heißt **Randpunkt** von D, falls $x_0 \in (D \cup D') \setminus D^0$ gilt.

g) D heißt **abgeschlossen**, falls $D' \subset D$ gilt.

Definition:

Gegeben seien eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein Häufungspunkt x_0 von D.

a) Für f existiert der Grenzwert in x_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $x \neq x_0$ und $|x - x_0| < \delta$ gilt

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon \, .$$

Man sagt, dass $f(x)$ dann gegen den **Grenzwert** y_0 **konvergiert**, wenn x gegen x_0 strebt und schreibt dafür auch $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ oder $f(x) \to y_0$ für $x \to x_0$.

b) Verlangt man in der obigen Definition $x < x_0$ bzw. $x_0 < x$ statt $x \neq x_0$, so heißt y_0 **linksseitiger** bzw. **rechtsseitiger Grenzwert** der Funktion f in x_0 und man schreibt $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ bzw. $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$.

c) Man spricht von **uneigentlicher Konvergenz**, wenn auch $x_0 = +\infty$ bzw. $x_0 = -\infty$ und/oder $y_0 = +\infty$ bzw. $y_0 = -\infty$ zugelassen sind.

Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen

Satz:

Für die Funktionen $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einen Häufungspunkt x_0 von D existieren für $x \to x_0$ die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Dann gelten die folgenden Rechenregeln

a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$,

b) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$,

c) $\lim\limits_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,

d) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$,

e) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ falls $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ gilt,

f) $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Im Definitionsbereich D von f und g lassen sich die Rechenregeln auch übertragen auf

$$x \to x_0+ \, , \quad x \to x_0- \, , \quad x \to \infty \quad \text{und} \quad x \to -\infty \, .$$

Rechnen mit ∞ bei den Funktionsgrenzwerten:

a) zulässig ist: $\infty \cdot \infty = \infty \, , \quad -\infty \cdot \infty = -\infty \, , \quad \infty + \infty = \infty \, , \quad \dfrac{0}{\pm\infty} = 0$

b) nicht erklärt ist: $\infty \cdot 0 \, , \quad -\infty \cdot 0 \, , \quad \infty - \infty \, , \quad \dfrac{\infty}{\infty} \, , \quad \dfrac{-\infty}{\infty} \, , \quad \dfrac{0}{0}$

Aufgabe 13:

a) Man bestimme für folgende Mengen die Menge aller Häufungspunkte M' und aller inneren Punkte M^0, und kläre, ob die Menge abgeschlossen oder offen ist.

$$M_1 = (]-3,5] \cap]2,8]) \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = \frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_2 = \{0\} \cup [3,4] \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = 1 + \frac{1}{2n}\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < y < |x| < 1 \right\}.$$

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \cos x \tan x$,

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 1+} \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$,

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (2 - \cosh x + \sinh x)$.

Lösung:

a) $]-3,5] \cap]2,8] =]2,5] \;\Rightarrow\; M_1 =]2,5] \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = \frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\}$

$\Rightarrow \quad M_1' = \{0\} \cup [2,5]$ und $M_1^0 =]2,5[$, M_1 ist weder offen noch abgeschlossen

$M_2 = \{0\} \cup [3,4] \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = 1 + \frac{1}{2n}\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\}$

$\Rightarrow \quad M_2' = \{1\} \cup [3,4]$ und $M_2^0 =]3,4[$, M_2 ist weder offen noch abgeschlossen

$$M_3' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le y \le |x| \le 1 \right\}, \quad M_3^0 = M_3\ , \quad M_3 \text{ ist offen.}$$

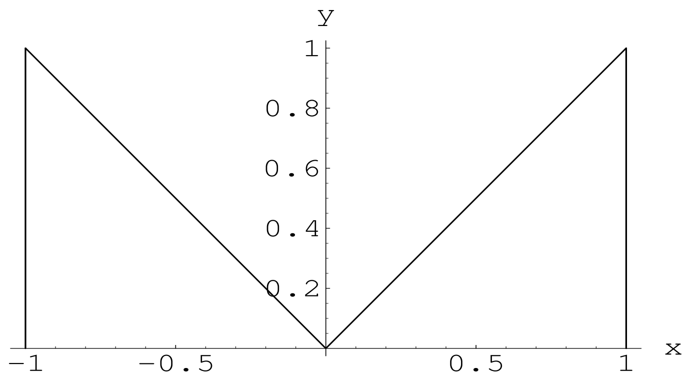


Bild 13 a) Menge M_3

b) (i) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \cos x \tan x = \lim\limits_{x\to\pi/2} \cos x \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to\pi/2} \sin x = 1$

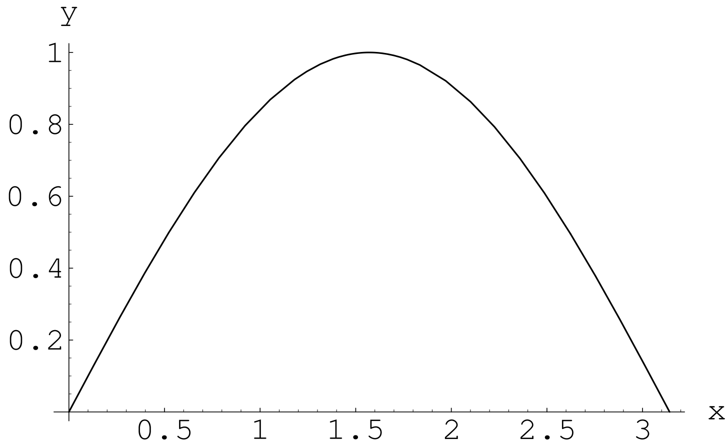


Bild 13 b) (i) $f(x) = \cos x \tan x = \sin x$

(ii) Der folgende Grenzwert existiert nur uneigentlich:

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} = \infty$$

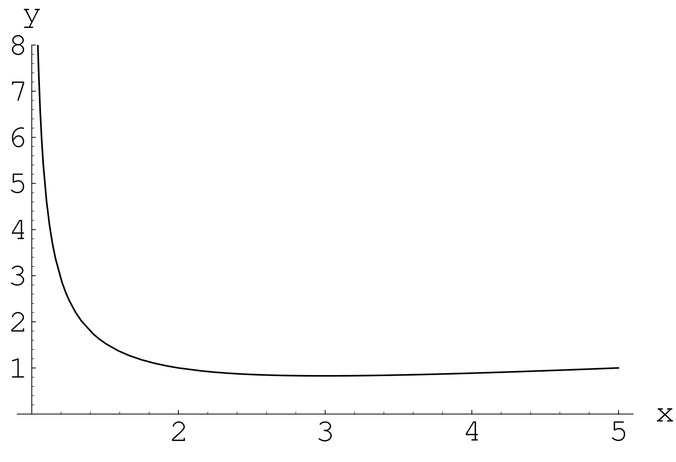


Bild 13 b) (ii) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$

(iii) Variante 1:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} (2 - \cosh x + \sinh x) &= \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{(\cosh x - \sinh x)(\cosh x + \sinh x)}{\cosh x + \sinh x} \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh x + \sinh x} \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{1}{\cosh x + \sinh x} \right) = 2
\end{aligned}$$

Variante 2:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(2-\cosh x+\sinh x) &= \lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})+\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}(2-e^{-x})=2\end{aligned}$$

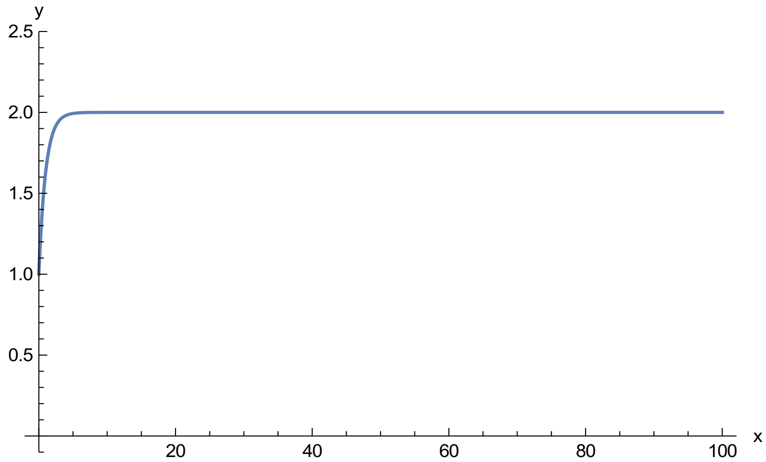


Bild 13 b) (iii) $f(x)=2-\cosh x+\sinh x$

Zahlenfolgen

Definition:

Unter einer reellen **Zahlenfolge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ versteht man eine Abbildung (Funktion) der Form

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n\,. \end{array}$$

Berechnung von Folgen:

a) direkte Berechnung über den Index n, z.B.: $a_n := \dfrac{n}{n^2+1}$,

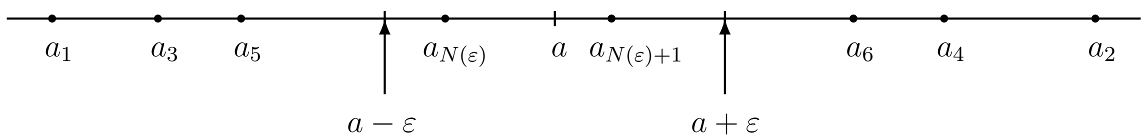
b) **rekursive** Berechnung, z.B.: $a_{n+1} := \dfrac{a_n}{3}$, mit $a_1 := 1$

Definition:

Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Nullfolge**, falls für alle (insbesondere beliebig kleine) $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt

$$|a_n| < \varepsilon, \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon)\,.$$

Die Folge **konvergiert** oder strebt dann gegen den **Grenzwert** Null und man schreibt dafür auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ oder $a_n \to 0$ für $n \to \infty$.



ε-Umgebung um a: $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

Definition:

Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen den **Grenzwert** $a \in \mathbb{R}$, wenn $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, d.h. falls für alle (insbesondere beliebig kleine) $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon)\,.$$

Man schreibt dafür auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

divergente Folge: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht

uneigentlich konvergente Folge: (spezielle Form der Divergenz)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Rechenregeln für Grenzwerte von Zahlenfolgen

Satz:

Für konvergente Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ gilt:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b,$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b,$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a,$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a}{b},$ falls $b \neq 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ $\ b_n \neq 0$ gilt,

f) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^k = a^k,$ für eine Konstante $k \in \mathbb{N}$.

Rechnen mit ∞:

a) zulässig ist: $\quad \infty \cdot \infty = \infty\,, \quad -\infty \cdot \infty = -\infty\,, \quad \infty + \infty = \infty\,, \quad \dfrac{0}{\pm\infty} = 0$

b) nicht erklärt ist: $\quad \infty \cdot 0\,, \quad -\infty \cdot 0\,, \quad \infty - \infty\,, \quad \dfrac{\infty}{\infty}\,, \quad \dfrac{-\infty}{\infty}$

Elementare Zahlenfolgen mit Grenzwerten

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \begin{cases} +\infty & ;\ k \in \mathbb{Z}^+ \\ 1 & ;\ k = 0 \\ 0 & ;\ k \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$

b) **geometrische Folge** mit $q \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & ;\ q > 1 \\ 1 & ;\ q = 1 \\ 0 & ;\ -1 < q < 1 \Leftrightarrow |q| < 1 \\ \text{divergent} & ;\ q \leq -1 \end{cases}$$

c) **Exponentialfunktionsfolge:** mit $x \in \mathbb{R}$ und $e = 2.71828182845904...$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x\,,$$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1 \quad$ für eine Konstante $c > 0$.

Konvergenzkriterium für reelle Zahlenfolgen

beschränkte Folge:

Es gibt reelle Konstanten A, B, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A \leq a_n \leq B$.

A wird als **untere** und B als **obere Schranke** der Folge bezeichnet.

nach oben bzw. **unten beschränkte Folge**:

Gilt nur $a_n \leq B$ bzw. $A \leq a_n$, so heißt die Folge **nach oben** bzw. **nach unten beschränkt**.

monotone Folge: es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a_n \leq a_{n+1} & (\textbf{monoton wachsend}) \\ a_n \geq a_{n+1} & (\textbf{monoton fallend}) \end{cases}$

Satz: **(Monotoniekriterium)**

Jede **monoton wachsende** und **nach oben beschränkte** reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Der Grenzwert ist dann das **Supremum** der Folge, d.h. die kleinste obere Schranke

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

Entsprechend konvergiert jede **monoton fallende** und **nach unten beschränkte** reelle Zahlenfolge und dann gegen das **Infimum** der Folge, d.h. gegen die größte untere Schranke

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

Aufgabe 14:

a) Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzwerte

$$a_n = \left(\frac{3n^2+1}{2n^2-n-7}\right)^3, \qquad b_n = \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n}\,,$$

$$c_n = \frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{4n^2+3}}{n}, \qquad d_n = \frac{2^{n+1}+3^n}{3^{n+1}+2^n}\,.$$

b) Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

$$e_1 = 0\,, \quad e_{n+1} = 1 - \frac{e_n}{3}\,, \qquad f_1 = 3\,, \quad f_{n+1} = \frac{f_n^2+8}{6}\,,$$

$$g_1 = 1\,, \quad g_{n+1} = 2g_n + 1\,.$$

Lösung:

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+1}{2n^2-n-7}\right)^3 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{3+1/n^2}{2-1/n-7/n^2}\right)^3$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+1/n^2}{2-1/n-7/n^2}\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{3+1/n^2}{2-1/n-7/n^2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-(n^2-2n)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\cdot\frac{4}{\sqrt{1+2/n}+\sqrt{1-2/n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+2/n}+\sqrt{1-2/n}} = \frac{4}{2} = 2$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{4n^2+3}}{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+2/n^2} - \sqrt{4+3/n^2} = -1$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^n}{3^{n+1}+2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n}\cdot\frac{2(2/3)^n+1}{3+(2/3)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(2/3)^n+1}{3+(2/3)^n} = \frac{2\cdot 0+1}{3+0} = \frac{1}{3}$$

e) Die ersten Folgenglieder lauten

$$e_1 = 0, e_2 = 1, e_3 = \frac{2}{3} = 0.666..., e_4 = \frac{7}{9} = 0.777..., e_5 = \frac{20}{27} = 0.740..., e_6 = \frac{61}{81} = 0.753...$$

Falls $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so sei $e := \lim\limits_{n\to\infty} e_n$ der Grenzwert.

Aus der Rekursion erhält man:

$$e = \lim_{n\to\infty} e_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{e_n}{3}\right) = 1 - \frac{e}{3} \;\Rightarrow\; e = \frac{3}{4}\,.$$

Zum Nachweis der Konvergenz von $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $e = \frac{3}{4}$ wird auf die Definition der Konvergenz gegen e zurückgegriffen

$$\begin{aligned}\left|e_{n+1} - \frac{3}{4}\right| &= \left|1 - \frac{e_n}{3} - \frac{3}{4}\right| = \left|-\frac{e_n}{3} + \frac{1}{4}\right| = \left|-\frac{1}{3}\left(e_n - \frac{3}{4}\right)\right| = \frac{1}{3}\left|e_n - \frac{3}{4}\right| \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\left|e_{n-1} - \frac{3}{4}\right| = \cdots = \left(\frac{1}{3}\right)^n\left|e_1 - \frac{3}{4}\right| = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{3}{4} \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.\end{aligned}$$

f) Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f konvergiert, so gilt $f = \dfrac{f^2+8}{6}$. Man erhält

$$0 = f^2 - 6f + 8 = (f-2)(f-4) \quad\Leftrightarrow\quad f = 2 \vee f = 4.$$

Die ersten Folgenglieder lauten:

$$f_1 = 3\,,\quad f_2 = \frac{17}{6} = 2.83...\,,\quad f_3 = \frac{577}{216} = 2.67...\,,\quad f_4 = \frac{706177}{279936} = 2.52...$$

Durch vollständige Induktion zeigt man $f_n \geq 2$:

$n = 1: \quad f_1 = 3 \geq 2$

$n \to n+1: \quad f_{n+1} = \dfrac{f_n^2+8}{6} \geq \dfrac{2^2+8}{6} = 2$

Weiter zeigt man durch vollständige Induktion $f_{n+1} \leq f_n$,

$n = 1: \quad f_2 = \dfrac{17}{6} \leq f_1 = 3$

$n \to n+1:$

$$0 \leq f_{n+1} \leq f_n \;\Rightarrow\; f_{n+1}^2 \leq f_n^2 \;\Rightarrow\; f_{n+2} = \frac{f_{n+1}^2+8}{6} \leq \frac{f_n^2+8}{6} = f_{n+1}.$$

Also fällt f_n monoton, ist nach unten beschränkt und damit dann konvergent gegen $f = 2$.

g) Falls $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so sei $g := \lim\limits_{n\to\infty} g_n$ der Grenzwert. Aus der Rekursion erhält man

$$g = 2g + 1 \quad\Rightarrow\quad g = -1\,.$$

Aus $g_1 = 1$ und $g_{n+1} = 2g_n + 1$ folgt jedoch durch Induktion $g_n \geq 0$.

Damit kann g_n nicht konvergieren.

Stetige Funktionen

Definition:

Gegeben seien eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein Häufungspunkt $x_0 \in D$.

a) f heißt **linksseitig stetig** in x_0, wenn $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

b) f heißt **rechtsseitig stetig** in x_0, wenn $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

c) f heißt **stetig in** x_0, wenn $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

d) Ist D eine offene Menge, dann heißt f **stetig auf** D, wenn f für alle $x \in D$ stetig ist.

Bemerkungen:

a) f ist in $x_0 \in D$ genau dann stetig, wenn für alle Folgen $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset D$ mit $x_n \to x_0 \Leftrightarrow x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0) = f(\lim_{n \to \infty} x_n)\,,$$

d.h. die Grenzwertbildung $\lim\limits_{n \to \infty}$ und f können vertauscht werden.

b) Die elementaren Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig: Polynome, gebrochen rationale Funktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen, Hyperbelfunktionen mit den zugehörigen Umkehrfunktionen.

c) Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten elementarer Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig.

Zwischenwertsatz:

Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < c < f(b)$ oder $f(a) > c > f(b)$ gibt es (mindestens) ein $x_0 \in \,]a, b[$ mit $f(x_0) = c$.

Spezialfall:

$c = 0 \Rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$, d.h. f besitzt eine Nullstelle in $]a, b[$.

Aufgabe 15:

a) Für die Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \quad x \neq 0 \\ 2 & , \quad x_0 = 0 \end{cases} \quad , \quad f_2(x) = \begin{cases} 3 & , \quad x \leq 1 = x_0 \\ e^x & , \quad 1 < x \end{cases} \quad ,$$

$$f_3(x) = \frac{x^2-2x-15}{x-5} \; , \; x_0 = 5 \quad , \quad f_4(x) = \begin{cases} 2x/\pi & , \quad x \leq \pi/2 = x_0 \\ \sin x & , \quad \pi/2 < x \end{cases}$$

zeichne man die Funktionsgraphen und berechne in x_0 links- und/oder rechtsseitige Grenzwerte und überprüfe damit, ob Stetigkeit oder stetige Ergänzbarkeit in x_0 vorliegt oder sich eine Unstetigkeit in x_0 beheben lässt.

b) Für die Funktion g mit

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - a & , \quad x < 1 \\ \ln x & , \quad 1 \leq x \end{cases}$$

bestimme man, falls dies möglich ist, $a \in \mathbb{R}$, so dass f in $x_0 = 1$ stetig wird.

Lösung:

a) (i)

$$\lim_{x \nearrow 0} f_1(x) = \lim_{x \nearrow 0}(x^2+1) = 0^2+1 = 1 \neq f_1(0) = 2$$
$$\lim_{x \searrow 0} f_1(x) = \lim_{x \searrow 0}(x^2+1) = 0^2+1 = 1 \neq f_1(0) = 2$$

f_1 ist unstetig in $x_0 = 0$.
Die Unstetigkeit in $x_0 = 0$ lässt sich durch Wahl von $f_1(0) = 1$ beheben.

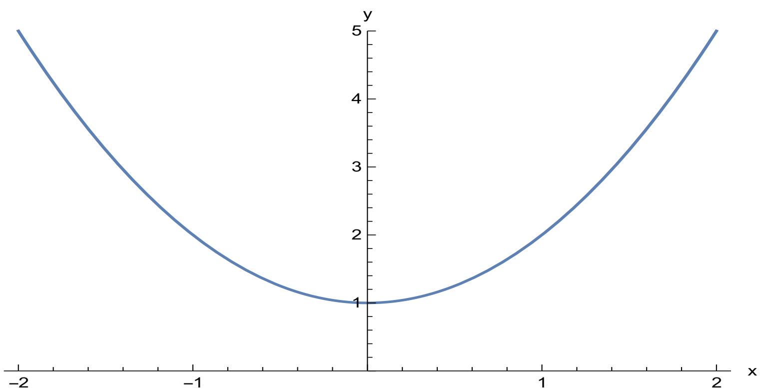


Bild 15 a) (i) $f_1(x)$

(ii)
$$\lim_{x\nearrow 1} f_2(x) = \lim_{x\nearrow 1} 3 = 3 = f_2(1)$$
$$\lim_{x\searrow 1} f_2(x) = \lim_{x\searrow 1} e^x = e^1 = e \neq f_2(1) = 3$$

f_2 besitzt in $x_0 = 1$ eine Sprungstelle, ist dort also unstetig.

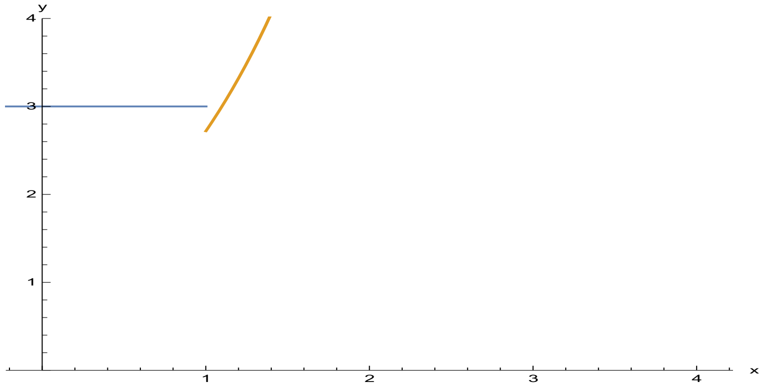


Bild 15 a) (ii) $f_2(x)$

(iii) f_3 besitzt in $x_0 = 5$ eine Definitionslücke.
Durch Linearfaktorzerlegung des Zählers erhält man

$$f_3(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} = \frac{(x+3)(x-5)}{x-5}\,.$$

$$\lim_{x\to 5-} f_3(x) = \lim_{x\to 5-} \frac{(x+3)(x-5)}{x-5} = \lim_{x\to 5-} x + 3 = 5 + 3 = 8$$
$$\lim_{x\to 5+} f_3(x) = \lim_{x\to 5+} \frac{(x+3)(x-5)}{x-5} = \lim_{x\to 5+} x + 3 = 5 + 3 = 8$$

Mit der Wahl von $f_3(5) = 8$ lässt sich f_3 in $x_0 = 5$ stetig ergänzen.

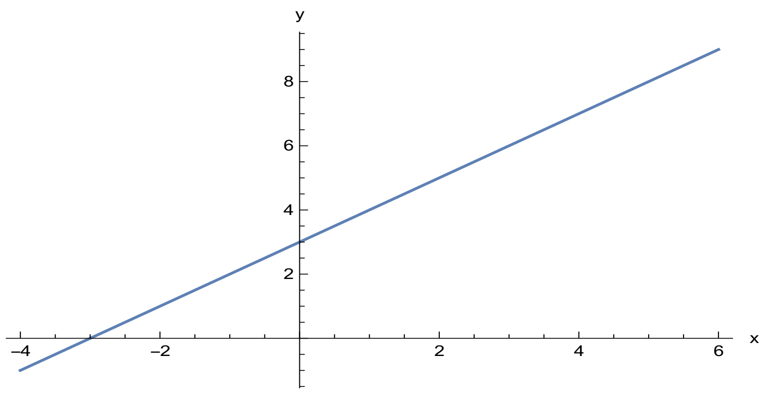


Bild 15 a) (iii) $f_3(x)$

(iv)

$$\lim_{x\to\pi/2-} f_4(x) = \lim_{x\to\pi/2-} 2x/\pi = 1 = f_4\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to\pi/2+} f_4(x) = \lim_{x\to\pi/2+} \sin x = \sin(\pi/2) = 1$$

f_4 ist stetig in $x_0 = \pi/2$.

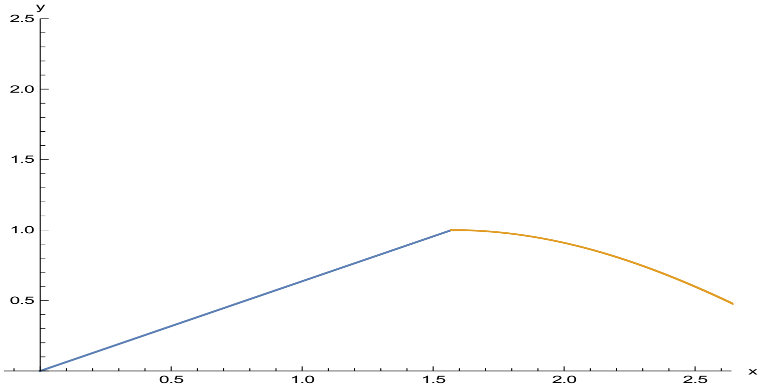


Bild 15 a) (iv) $f_4(x)$

b) Für die Stetigkeit von g in $x_0 = 1$ muss

$$\lim_{x\nearrow 1} g(x) = \lim_{x\nearrow 1}(x^2 - a) = 1^2 - a \stackrel{!}{=} g(1) = \ln 1 = 0$$

gelten. Man erhält damit $a = 1$.

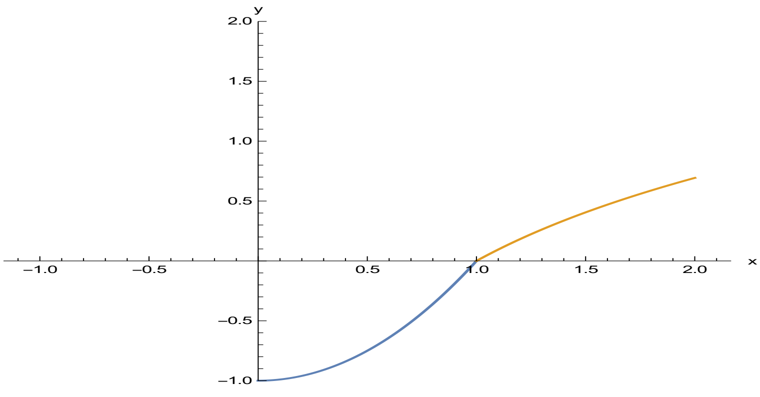


Bild 15 b) $g(x)$ mit $a = 1$

Aufgabe 16:

Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Abbildungsvorschrift

$$f(x) = x^4 + \frac{113}{44}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{113}{22}x + 1$$

berechne man mit Hilfe des Intervallhalbierungsverfahrens Näherungen $\tilde{x}$ für alle Nullstellen x^* bis auf einen absoluten Fehler von $|\tilde{x} - x^*| \leq 0.001$.

Lösung:

Da f stetig ist, ergeben sich nach dem Zwischenwertsatz Nullstellen in folgenden Intervallen:

$$f(-3)\cdot f(-2) = (5.568181...)\cdot(-3.272727...) = -18.223140... < 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^* \in [-3,-2]$$

$$f(-2)\cdot f(-1) = (-3.272727...)\cdot(2.068181...) = -6.768595... < 0 \quad \Rightarrow \quad x_2^* \in [-2,-1]$$

$$f(0)\cdot f(1) = 1\cdot(-3.068181...) = -3.068181... < 0 \quad \Rightarrow \quad x_3^* \in [0,1]$$

$$f(1)\cdot f(2) = (-3.068181...)\cdot(17.272727...) = -52.995867... < 0 \quad \Rightarrow \quad x_4^* \in [1,2]$$

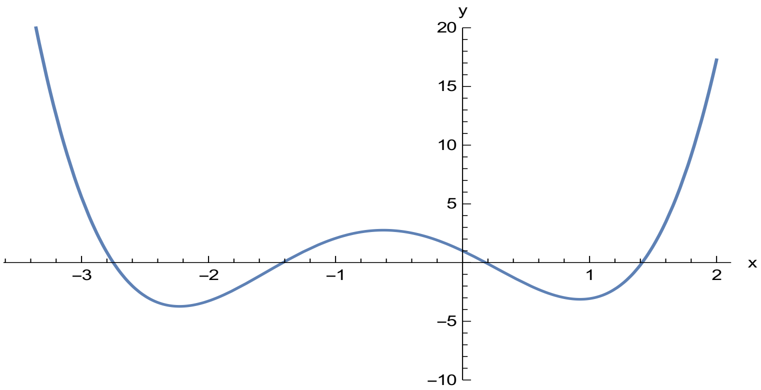


Bild 16 $f(x) = x^4 + \frac{113}{44}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{113}{22}x + 1 = (x^2-2)(x+11/4)(x-2/11)$

Nach Konstruktion lauten die Nullstellen:

$$x_1^* = -\frac{11}{4} = -2.75, x_2^* = -\sqrt{2} = -1.41421..., x_3^* = \frac{2}{11} = 0.181818...., x_4^* = \sqrt{2} = 1.41421...$$

Diese sind von der Aufgabenstellung her nicht bekannt und werden nun mit dem Intervallhalbierungsverfahren berechnet.

Ein Matlab-Programm zur Nullstellenberechnung mit Bisektion:

```
function x = bisektion(a,b,eps,funkt)
%-------------------------------------------------------------
% Berechnet eine Nullstelle mit Hilfe des Bisektionsverfahrens
%
% Input:    a<b   mit  funkt(a)<0  und  funkt(b)>0 (oder umgekehrt)
%           |b-a|<eps   Genauigkeit
%           funkt Funktion deren Nullstelle gesucht ist
%                 muss als inline Funktion definiert sein,
%                 z.B.: funkt=inline('(x^2-2)*(x-2/11)*(x+11/4)','x')
%
% Output:   x     Nullstellennäherung
%
% Kai Rothe, November 2016.
%-------------------------------------------------------------
  format long
  if(funkt(a)*funkt(b)>=0)
    [a b funkt(a) funkt(b)]
  else
    while(abs(b-a)>=eps)
      x = (a+b)/2;
      [a x b abs(b-a); funkt(a) funkt(x) funkt(b) eps]
      if(funkt(x)==0)
        break
      end
      if(funkt(a)*funkt(x)<0)
        b=x;
      else
        a=x;
      end
    end
  end


>> funkt=inline('(x^2-2)*(x-2/11)*(x+11/4)','x')
>> bisektion(-3.0,-2.0,0.001,funkt)

ans =
  -3.000000000000000  -2.500000000000000  -2.000000000000000   1.000000000000000
   5.568181818181818  -2.849431818181818  -3.272727272727272   0.001000000000000

ans =
  -3.000000000000000  -2.750000000000000  -2.500000000000000   0.500000000000000
   5.568181818181818                   0  -2.849431818181818   0.001000000000000

ans =   -2.750000000000000
```

```
>> funkt=inline('(x^2-2)*(x-2/11)*(x+11/4)','x')
>> bisektion(-2.0,-1.0,0.001,funkt)

ans =
  -2.000000000000000  -1.500000000000000  -1.000000000000000   1.000000000000000
  -3.272727272727272  -0.525568181818182   2.068181818181818   0.001000000000000

ans =
  -1.500000000000000  -1.250000000000000  -1.000000000000000   0.500000000000000
  -0.525568181818182   0.939630681818182   2.068181818181818   0.001000000000000

ans =

  -1.500000000000000  -1.375000000000000  -1.250000000000000   0.250000000000000
  -0.525568181818182   0.234130859375000   0.939630681818182   0.001000000000000

ans =
  -1.500000000000000  -1.437500000000000  -1.375000000000000   0.125000000000000
  -0.525568181818182  -0.141136863014915   0.234130859375000   0.001000000000000

ans =
  -1.437500000000000  -1.406250000000000  -1.375000000000000   0.062500000000000
  -0.141136863014915   0.047930890863592   0.234130859375000   0.001000000000000

ans =
  -1.437500000000000  -1.421875000000000  -1.406250000000000   0.031250000000000
  -0.141136863014915  -0.046279674226587   0.047930890863592   0.001000000000000

ans =
  -1.421875000000000  -1.414062500000000  -1.406250000000000   0.015625000000000
  -0.046279674226587   0.000910887325352   0.047930890863592   0.001000000000000

ans =
  -1.421875000000000  -1.417968750000000  -1.414062500000000   0.007812500000000
  -0.046279674226587  -0.022663626587018   0.000910887325352   0.001000000000000

ans =
  -1.417968750000000  -1.416015625000000  -1.414062500000000   0.003906250000000
  -0.022663626587018  -0.010871108585641   0.000910887325352   0.001000000000000

ans =
  -1.416015625000000  -1.415039062500000  -1.414062500000000   0.001953125000000
  -0.010871108585641  -0.004978786721784   0.000910887325352   0.001000000000000

ans = -1.415039062500000
```

```
>> funkt=inline('(x^2-2)*(x-2/11)*(x+11/4)','x')
>> bisektion(0.0,1.0,0.001,funkt)

ans =
                   0   0.500000000000000   1.000000000000000   1.000000000000000
   1.000000000000000  -1.809659090909091  -3.068181818181818   0.001000000000000

ans =
                   0   0.250000000000000   0.500000000000000   0.500000000000000
   1.000000000000000  -0.396306818181818  -1.809659090909091   0.001000000000000

ans =
                   0   0.125000000000000   0.250000000000000   0.250000000000000
   1.000000000000000   0.324152166193182  -0.396306818181818   0.001000000000000

ans =
   0.125000000000000   0.187500000000000   0.250000000000000   0.125000000000000
   0.324152166193182  -0.032793912020597  -0.396306818181818   0.001000000000000

ans =
   0.125000000000000   0.156250000000000   0.187500000000000   0.062500000000000
   0.324152166193182   0.146800908175382  -0.032793912020597   0.001000000000000

ans =
   0.156250000000000   0.171875000000000   0.187500000000000   0.031250000000000
   0.146800908175382   0.057247221469879  -0.032793912020597   0.001000000000000

ans =
   0.171875000000000   0.179687500000000   0.187500000000000   0.015625000000000
   0.057247221469879   0.012282917106693  -0.032793912020597   0.001000000000000

ans =
   0.179687500000000   0.183593750000000   0.187500000000000   0.007812500000000
   0.012282917106693  -0.010242020309141  -0.032793912020597   0.001000000000000

ans =
   0.179687500000000   0.181640625000000   0.183593750000000   0.003906250000000
   0.012282917106693   0.001023891459971  -0.010242020309141   0.001000000000000

ans =
   0.181640625000000   0.182617187500000   0.183593750000000   0.001953125000000
   0.001023891459971  -0.004608212867424  -0.010242020309141   0.001000000000000

ans =  0.182617187500000
```

```
>> funkt=inline('(x^2-2)*(x-2/11)*(x+11/4)','x')
>> bisektion(1.0,2.0,0.001,funkt)

ans =
   1.000000000000000   1.500000000000000   2.000000000000000   1.000000000000000
  -3.068181818181818   1.400568181818182  17.272727272727273   0.001000000000000

ans =
   1.000000000000000   1.250000000000000   1.500000000000000   0.500000000000000
  -3.068181818181818  -1.869318181818182   1.400568181818182   0.001000000000000

ans =
   1.250000000000000   1.375000000000000   1.500000000000000   0.250000000000000
  -1.869318181818182  -0.538330078125000   1.400568181818182   0.001000000000000

ans =
   1.375000000000000   1.437500000000000   1.500000000000000   0.125000000000000
  -0.538330078125000   0.349175193093040   1.400568181818182   0.001000000000000

ans =
   1.375000000000000   1.406250000000000   1.437500000000000   0.062500000000000
  -0.538330078125000  -0.114304715936834   0.349175193093040   0.001000000000000

ans =
   1.406250000000000   1.421875000000000   1.437500000000000   0.031250000000000
  -0.114304715936834   0.112409477884119   0.349175193093040   0.001000000000000

ans =
   1.406250000000000   1.414062500000000   1.421875000000000   0.015625000000000
  -0.114304715936834  -0.002192260528153   0.112409477884119   0.001000000000000

ans =
   1.414062500000000   1.417968750000000   1.421875000000000   0.007812500000000
  -0.002192260528153   0.054795976961032   0.112409477884119   0.001000000000000

ans =
   1.414062500000000   1.416015625000000   1.417968750000000   0.003906250000000
  -0.002192260528153   0.026223884423168   0.054795976961032   0.001000000000000

ans =
   1.414062500000000   1.415039062500000   1.416015625000000   0.001953125000000
  -0.002192260528153   0.011996341497086   0.026223884423168   0.001000000000000

ans =  1.415039062500000
```