Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Dr. K. Rothe ©

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 5

Differenzierbarkeit

Definition: (**Differenzierbarkeit**)

Gegeben seien eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ und ein Punkt $x_0 \in D \cap D'$.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar in** x_0, falls folgender Grenzwert existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

$f'(x_0)$ heißt **Ableitung**, **Differentialquotient** oder **Tangentensteigung** von f in x_0 und wird auch mit $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ bezeichnet.

Die **Tangente** zu f in x_0 ist gegeben durch $T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

f heißt **differenzierbar in** $D \cap D'$, falls f für alle $x_0 \in D \cap D'$ differenzierbar ist.

Folgerungen:

a) Ist eine Funktion f in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

b) Eine stetige Funktion f ist in $x_0 \in D^0$ genau dann differenzierbar, wenn **linksseitige** und **rechtsseitige Ableitung** übereinstimmen:

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \Leftrightarrow$$

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_+(x_0) .$$

Aufgabe 17:

a) Man berechne die für alle $x \in \mathbb{R}$ stetige Funktion, für die gilt

$$\begin{array}{rcll} f(0) & = & 0 & , \\ f'(x) & = & -2 & \text{für} \quad -\infty < x < -1\,, \\ f'(x) & = & 2x & \text{für} \quad -1 < x < 2\,, \\ f'(x) & = & 1 & \text{für} \quad 2 < x < \infty \end{array}$$

und zeichne die Funktion. Ist f auch differenzierbar?

b) Für die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} ax + b\,, & x < 1 \\ \ln x\,, & 1 \le x \end{cases}$$

bestimme man $a, b \in \mathbb{R}$, sodass f in $x_0 = 1$ stetig differenzierbar wird und zeichne f.

c) Man berechne die Tangentengleichung zu $f(x) = \cos x$ im Punkt $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ und fertige eine Zeichnung an.

Lösung:

a) Aus den gegebenen Werten für die Ableitung der Funktion folgt:

$$\begin{array}{rcll} f(0) & = & 0 & , \\ f(x) & = & -2x + a & \text{für} \quad -\infty < x < -1\,, \\ f(x) & = & x^2 + b & \text{für} \quad -1 < x < 2\,, \\ f(x) & = & x + c & \text{für} \quad 2 < x < \infty \end{array}$$

mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Diese ist stetig für $x \neq -1$ und $x \neq 2$.

Mit $0 = f(0) = 0^2 + b$ erhält man $b = 0$.

Die Stetigkeitsforderung im Punkt $x = -1$ ergibt:

$$2 + a = \lim_{x \to -1-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \to -1+} f(x) = (-1)^2 + b = 1 \;\Rightarrow\; a = -1\,.$$

Die Stetigkeitsforderung im Punkt $x = 2$ ergibt:

$$4 = 2^2 + b = \lim_{x \to 2-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \to 2+} f(x) = 2 + c \;\Rightarrow\; c = 2\,.$$

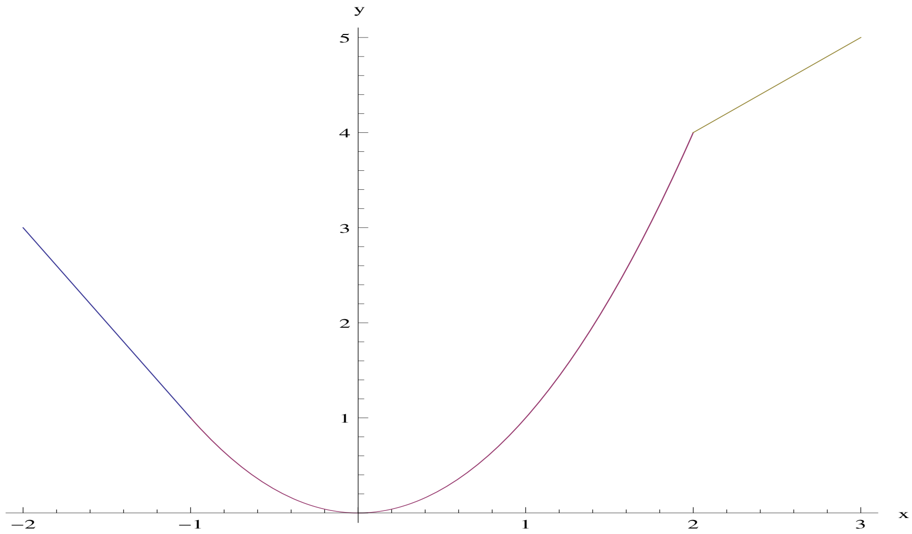


Bild 17 a) $f(x)$ mit $a = -1$, $b = 0$ und $c = 2$

Die nun stetige Funktion f ist im Punkt $x = -1$ auch differenzierbar, denn es gilt

$$\lim_{x \to -1-} f'(x) = -2 = \lim_{x \to -1+} f'(x)\,.$$

Im Punkt $x = 2$ ist f nicht differenzierbar, denn es gilt

$$\lim_{x \to 2-} f'(x) = 4 \neq 1 = \lim_{x \to 2+} f'(x)\,.$$

b) Stetigkeitsforderung im Punkt $x_0 = 1$

$$a + b = \lim_{x \to 1-} ax + b \overset{!}{=} f(1) = \ln 1 = 0 \;\Rightarrow\; b = -a,$$

Differenzierbarkeitsforderung im Punkt $x_0 = 1$

$$a = \lim_{x \to 1-} (ax + b)' = \lim_{x \to 1-} f'(x) \overset{!}{=} \lim_{x \to 1+} f'(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{1}{x} = 1 \;\Rightarrow\; a = 1 \;\Rightarrow\; b = -1\,.$$

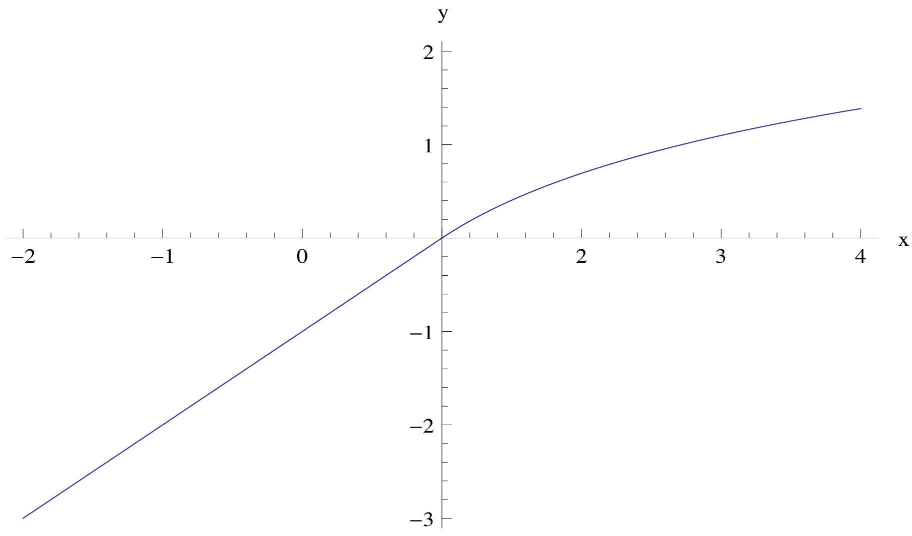


Bild 17 b) $f(x)$ mit $a = 1$ und $b = -1$

c) $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$

$$\Rightarrow \quad T(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

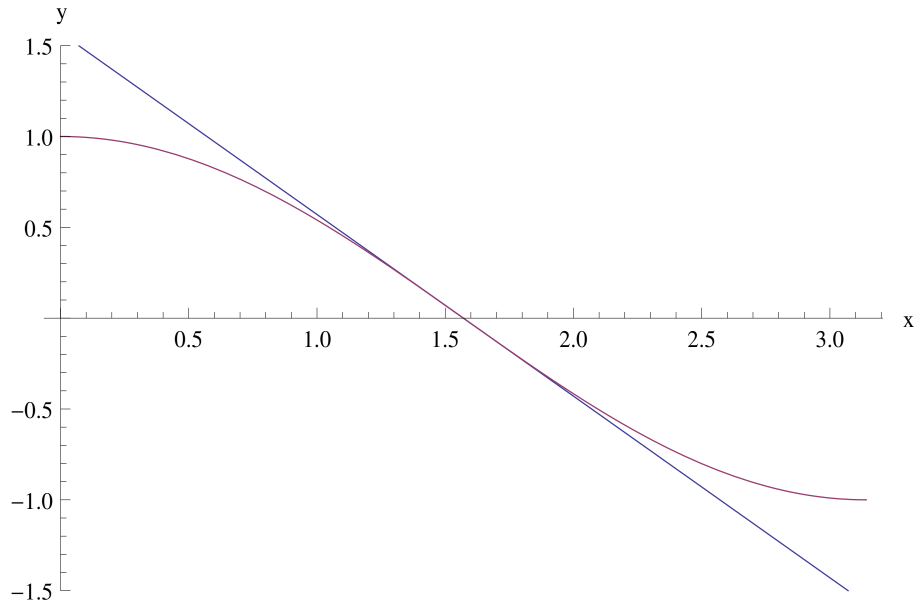


Bild 17 c) $f(x) = \cos x$ mit Tangente $T(x) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ in $x_0 = \frac{\pi}{2}$

Differentiationsregeln

Satz: (**Differentiationsregeln**)

a) Sind $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so gilt:

(i) **Linearität**

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)\,, \quad (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0) \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

(ii) **Produktregel**

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,,$$

(iii) **Kehrwertregel**

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \quad \text{für} \quad g(x_0) \neq 0\,,$$

(iv) **Quotientenregel**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \quad \text{für} \quad g(x_0) \neq 0\,.$$

b) **Kettenregel**

Gegeben seien die Funktionen $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset E$.

Ist f in $x_0 \in D^0$ und g in $f(x_0) =: y_0 \in f(D)^0$ differenzierbar, dann gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)\,.$$

c) **Ableitung der Umkehrfunktion**

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine in $[a, b]$ stetige und streng monoton wachsende Funktion und differenzierbar in $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) \neq 0$.

Dann ist die Umkehrfunktion $g : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und es gilt:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}\,.$$

d) **Logarithmisches Differenzieren**

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ in $x_0 \in [a, b]$ differenzierbar,
so ergibt das Differenzieren von $\ln f(x_0)$ mit Hilfe der Kettenregel

$$f'(x_0) = f(x_0)(\ln f(x_0))'.$$

Die Ableitung f' einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ kann wieder als Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$ aufgefasst werden.

Definition: (**höhere Ableitungen**)

Ist $f' : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so wird diese Ableitung von f' **zweite Ableitung** von f genannt und mit $f''(x)$ oder $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$ bezeichnet.

Allgemein lässt sich die n**-te Ableitung** ($n \geq 1$) rekursiv definieren durch:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)} f(x)}{dx^{(n)}} := \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(n-1)} f(x)}{dx^{(n-1)}}\right) \quad \text{mit} \quad f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{d^{(0)} f(x)}{dx^{(0)}} .$$

Aufgabe 18:

a) Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

$$\text{i) } f(x) = \frac{x + \sin x \cos x}{2} , \qquad \text{ii) } g(x) = (2x+1)^{\sin x} .$$

b) Man berechne die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } h(x) = \frac{x+2}{x^3+8} , \qquad \text{ii) } k(x) = \ln(x^2 - 1) .$$

c) Man berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } u(x) = 2(1-3x)^2 + 4(5x-2) - 7 , \qquad \text{ii) } v(x) = \sqrt[3]{(5x+1)^2} .$$

Lösung:

a) (i)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x + \sin x \cos x}{2}\right)' \\ &= \frac{1 + \cos^2 x - \sin^2 x}{2} = \frac{\cos^2 x + \cos^2 x}{2} = \cos^2 x \end{aligned}$$

(ii) Logaritmisches Differenzieren von $g(x) = (2x+1)^{\sin x}$ ergibt

$$\begin{aligned} g'(x) &= g(x)(\ln g(x))' = (2x+1)^{\sin x} \left(\ln(2x+1)^{\sin x}\right)' \\ &= (2x+1)^{\sin x} \left(\sin(x) \ln(2x+1)\right)' \\ &= (2x+1)^{\sin x} \left(\cos(x) \ln(2x+1) + \frac{2 \sin x}{2x+1}\right) . \end{aligned}$$

Alternativ ohne die Formel für das logaritmische Differenzieren:

$$\begin{aligned}
g(x) &= (2x+1)^{\sin x} = e^{\ln(2x+1)^{\sin x}} = e^{\sin(x)\ln(2x+1)}\\
g'(x) &= \left(e^{\sin(x)\ln(2x+1)}\right)' = e^{\sin(x)\ln(2x+1)}\left(\sin(x)\ln(2x+1)\right)'\\
&= (2x+1)^{\sin x}\left(\cos(x)\ln(2x+1)+\frac{2\sin x}{2x+1}\right)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\text{i) } h(x) &= \frac{x+2}{x^3+8} = \frac{1}{x^2-2x+4}\\
h'(x) &= \left(\frac{1}{x^2-2x+4}\right)' = -\frac{2x-2}{(x^2-2x+4)^2}\\
h''(x) &= -\left(\frac{2x-2}{(x^2-2x+4)^2}\right)'\\
&= -\frac{2(x^2-2x+4)^2-(2x-2)2(2x-2)(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+4)^4}\\
&= -\frac{2(x^2-2x+4)-2(2x-2)^2}{(x^2-2x+4)^3} = \frac{6x^2-12x}{(x^2-2x+4)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii) } k(x) &= \ln(x^2-1) = \ln((x+1)(x-1)) = \ln(x+1)+\ln(x-1)\\
k'(x) &= (\ln(x^2-1))' = \frac{2x}{x^2-1}\\
k''(x) &= \left(\frac{2x}{x^2-1}\right)' = \frac{2(x^2-1)-2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

Alternative Rechnung:

$$\begin{aligned}
k'(x) &= (\ln(x+1)+\ln(x-1))' = \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1}\\
k''(x) &= \left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\text{i) } u'(x) &= (2(1-3x)^2+4(5x-2)-7)' = -12(1-3x)+20\\
u''(x) &= (-12(1-3x)+20)' = 36\\
u'''(x) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii) } v'(x) &= \left(\sqrt[3]{(5x+1)^2}\right)' = \left((5x+1)^{2/3}\right)' = \frac{10}{3}(5x+1)^{-1/3}\\
v''(x) &= -\frac{50}{9}(5x+1)^{-4/3}\\
v'''(x) &= \frac{1000}{27}(5x+1)^{-7/3}
\end{aligned}$$

Zwischenwertsatz:

Für eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$f(a) < c < f(b) \quad \Rightarrow \quad \exists\, x_0 \in]a,b[\quad \text{mit} \quad f(x_0) = c\,.$$

Mittelwertsätze:

Gegeben seien stetige Funktionen

$$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}\,,$$

die auf $]a,b[$ differenzierbar sind. Dann gilt

a) **Satz von Rolle**

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad \exists\, x_0 \in]a,b[\quad \text{mit} \quad f'(x_0) = 0\,,$$

b) **Mittelwertsatz**

$$\exists\, x_0 \in]a,b[\quad \text{mit} \quad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,,$$

Beispiel: $f(x) = 3 - (x-3)^2$ mit $x \in [1,3]$ und $x_0 = 2$

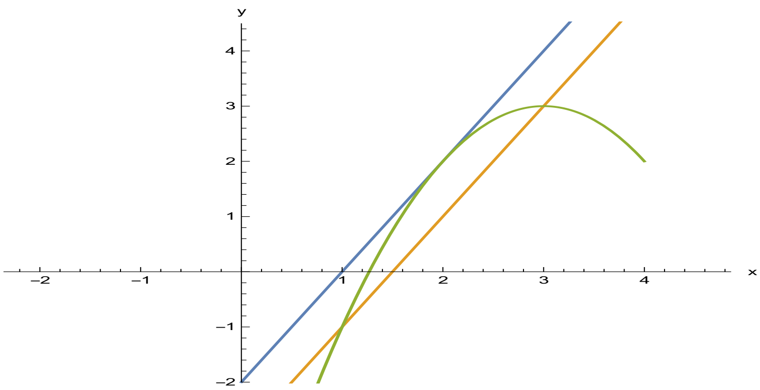


Bild: Sekante $S(x) = 2x - 3$ und Tangente $T(x) = 2 + 2(x-2)$

c) **verallgemeinerter Mittelwertsatz**

$$\forall\, x \in]a,b[\;\text{ gelte }\; g'(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, x_0 \in]a,b[\quad \text{mit} \quad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,.$$

Aufgabe 19:

a) Gegeben sie die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^3 - x - \frac{4}{5} + \cos x \,. \end{aligned}$$

(i) Man zeige mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion f mindestens drei Nullstellen besitzt.

(ii) Man zeige mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass f höchstens drei und damit dann genau zwei Nullstellen besitzt.

(iii) Man berechne die drei Nullstellen x^* mit Hilfe des Bisektionsverfahrens aus Aufgabe 16 bis auf einen absoluten Fehler von $|\tilde{x} - x^*| \leq 10^{-10}$.

b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } \; x \leq 0 \,, \\ x^2 & \text{für } \; 0 < x \,. \end{cases}$$

(i) Man berechne $f'(x)$ und $f''(x)$.

(ii) Ist der Mittelwertsatz

$$g'(x_0) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \quad \text{mit} \quad x_0 \in]a, b[$$

für $a = -1$ und $b = 1$ auf $f(x)$ und $f'(x)$ anwendbar?
Man bestimme gegebenenfalls die Zwischenstelle(n) x_0.

Lösung:

a) (i) Durch Einsetzen einiger Funktionswerte erhält man:

$$f(-1) = -0.259698..., \quad f(0) = 0.2, \quad f(1) = -0.259698..., \quad f(2) = 4.78385...$$

Da f stetig ist, besitzt f nach dem Zwischenwertsatz in jedem der drei Intervalle $]-1, 0[$, $]0, 1[$ und $]1, 2[$ mindestens eine Nullstelle.

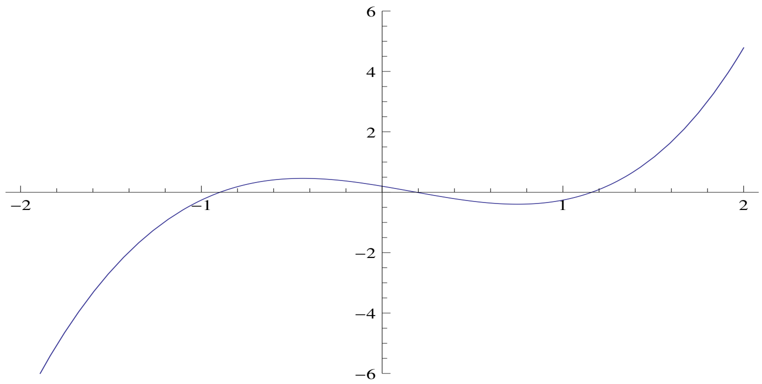


Bild 19 a) $f(x) = x^3 - x - \dfrac{4}{5} + \cos x$

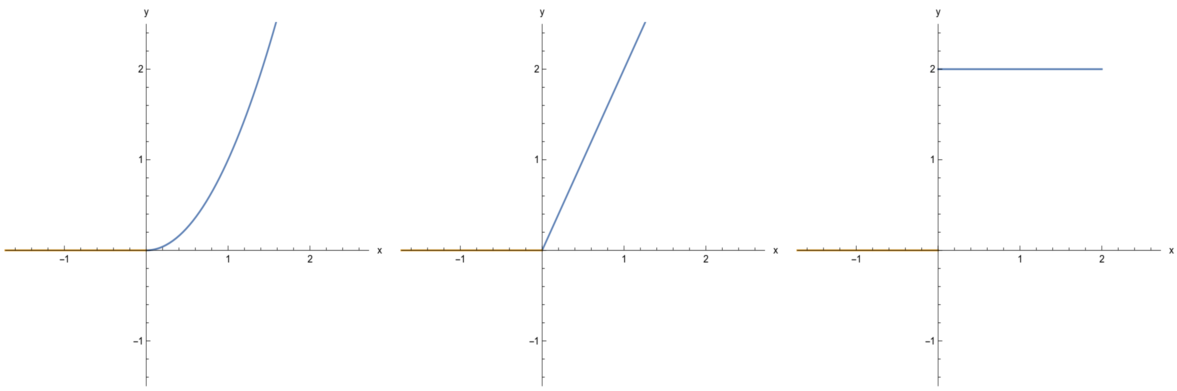
(ii) f ist beliebig oft differenzierbar.

Angenommen f besäße mehr als drei Nullstellen, dann hätte nach dem Satz von Rolle $f'(x) = 3x^2 - 1 - \sin x$ mehr als zwei Nullstellen, $f''(x) = 6x - \cos x$ mehr als eine Nullstelle und $f'''(x) = 6 + \sin x$ mindestens eine Nullstelle. Dies ist jedoch falsch. Also besitzt f höchstens drei Nullstellen.

(iii)

```
>> funkt=inline('x^3-x-4/5+cos(x)','x')
>> bisektion(-1.0,0.0,10^(-10),funkt)
   ans = -0.896645831351634
>> bisektion(0.0,1.0,10^(-10),funkt)
   ans = 0.188948064169381
>> bisektion(1.0,2.0,10^(-10),funkt)
   ans = 1.159888881898951
```

b) (i)



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \le 0\,, \\ x^2 & \text{für} \quad 0 < x \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \le 0\,, \\ 2x & \text{für} \quad 0 < x \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0\,, \\ 2 & \text{für} \quad 0 < x \end{cases}$$

Bild 19 b)

(ii) Da f stetig und differenzierbar in $\mathbb{R}$ ist, sind die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt.

Es kann hier nur eine Zwischenstelle $x_0 \in]-1,1[$ berechnet werden:

$$f'(x_0) = \frac{f(1) - f(-1)}{1-(-1)} = \frac{1^2 - 0}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{4} \in]-1,1[\,.$$

Die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes für f' sind nicht erfüllt, da f'' für $x = 0$ nicht definiert ist und diese Definitionslücke im zu untersuchenden Intervall $]-1,1[$ liegt.

Tatsächlich lässt sich auch kein x_0 angeben, für das

$$f''(x_0) = \frac{f'(1) - f'(-1)}{1-(-1)} = \frac{2-0}{2} = 1$$

gilt.

Regeln von de l'Hospital

Satz:

a) **Regel von de l'Hospital für den Fall** $\frac{0}{0}$

Es seien $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in]a, b[$.

Außerdem gelte $f(x_0) = 0$ und $g(x_0) = 0$, sowie $g'(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$.

Existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, dann gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

b) **Regel von de l'Hospital für den Fall** $\frac{\infty}{\infty}$

Es seien $f, g :]a, b[\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x_0 \in]a, b[$.

Außerdem gelte $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, sowie $g'(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$.

Existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, dann gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Folgerungen:

Durch Umformung und unter Berücksichtigung der obigen Voraussetzungen kann man folgende Fälle auf den Fall $\frac{0}{0}$ zurückführen:

a) **der Fall** $0 \cdot \infty$

Gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, dann erhält man

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1/g(x)} ,$$

b) **der Fall** $\infty - \infty$

Gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, dann erhält man

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/(f(x) \cdot g(x))} .$$

Monotonie und Extremwerte

Kriterien für Monotonie:

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion in $[a,b]$.

a) Es gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b] \;\Leftrightarrow\; f(x)$ wächst monoton in $[a,b]$.

b) Es gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a,b] \;\Rightarrow\; f(x)$ wächst streng monoton in $[a,b]$.

c) Es gilt $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a,b] \;\Leftrightarrow\; f(x)$ fällt monoton in $[a,b]$.

d) Es gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a,b] \;\Rightarrow\; f(x)$ fällt streng monoton in $[a,b]$.

Definition:

Gegeben sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$. Für $x_0 \in D$ definiert man:

a) f besitzt in x_0 ein **globales Maximum**, falls $\forall x \in D$ gilt: $f(x) \leq f(x_0)$

b) f besitzt in x_0 ein **lokales Maximum**, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $\forall x \in\,]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\, \cap D$ gilt: $f(x) \leq f(x_0)$

c) Kann in a) und b) für $x \neq x_0$ die Ungleichung $f(x) \leq f(x_0)$ durch $f(x) < f(x_0)$ ersetzt werden, so handelt es sich um ein **strenges Maximum** in x_0.

d) Gilt in a) und b) $f(x) \geq f(x_0)$ und in c) $f(x) > f(x_0)$, so liegt entsprechend ein **Minimum** in x_0 vor.

e) f besitzt in x_0 ein **Extremum**, falls es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

f) f besitzt in x_0 einen **stationären Punkt**, falls $f'(x_0) = 0$ gilt.

Kriterien für Extremwerte:

a) **notwendige Bedingung**:
Ist f in $x_0 \in\,]a,b[$ differenzierbar und liegt in x_0 eine lokale Extremstelle vor, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

b) **hinreichende Bedingung I**:
Es sei f stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in $]a,b[$. Gilt $f'(x_0) = 0$ für $x_0 \in\,]a,b[$ und

(i) $f'(x) \geq 0$ für $x \in\,]a, x_0[$ und $f'(x) \leq 0$ für $x \in\,]x_0, b[$, dann besitzt f in x_0 ein lokales Maximum,

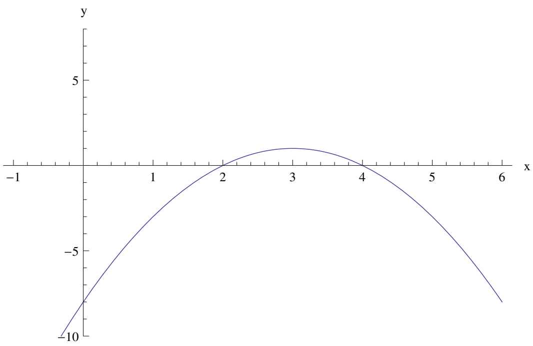
(ii) $f'(x) \leq 0$ für $x \in\,]a, x_0[$ und $f'(x) \geq 0$ für $x \in\,]x_0, b[$, dann besitzt f in x_0 ein lokales Minimum.

Aufgabe 20:

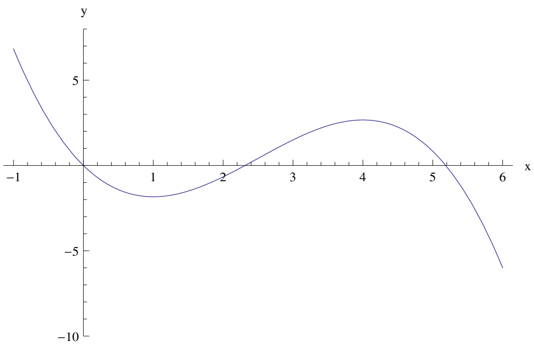
a) Man berechne die folgenden Grenzwerte

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1}{x^2}\,, \quad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{3}{x} - \frac{6}{e^{2x} - 1}\,.$$

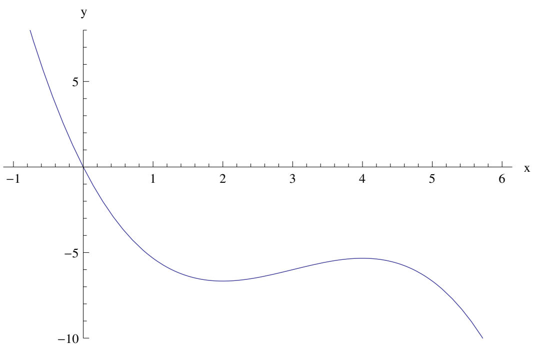
b) Nur die Ableitung $g'(x) = -x^2 + 6x - 8$ ist von der reellwertigen Funktion g bekannt. Man gebe die Monotoniebereiche von g an und klassifiziere alle Extremwerte. Anschließend begründe man, welcher der unten angegebenen Funktionsgraphen g_i mit dem von g übereinstimmt.



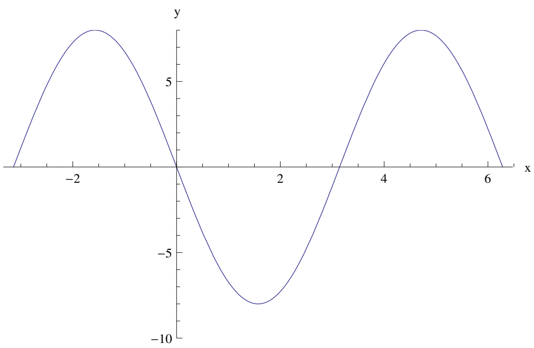
Funktion g_1



Funktion g_2



Funktion g_3



Funktion g_4

Lösung:

a) Mit Hilfe der Regel von l'Hospital ergibt sich

(i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

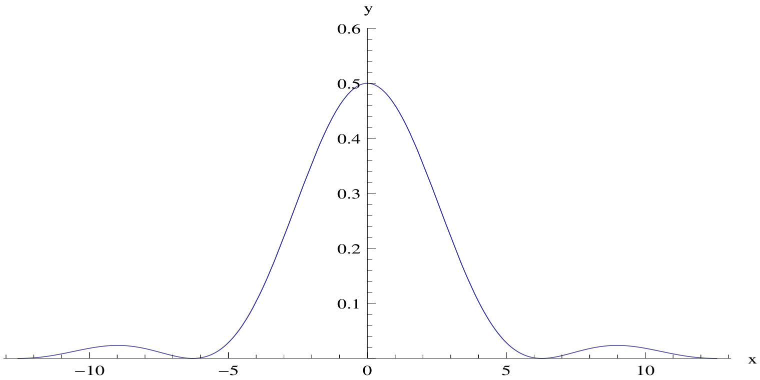


Bild 20 a) (i) $\quad f(x) = \dfrac{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 1}{x^2}$

(ii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{3}{x} - \frac{6}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{3e^{2x} - 3 - 6x}{x(e^{2x}-1)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6e^{2x} - 6}{e^{2x} + 2xe^{2x} - 1}$$
$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{12e^{2x}}{4e^{2x} + 4xe^{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{12}{4+4x} = 3\,.$$

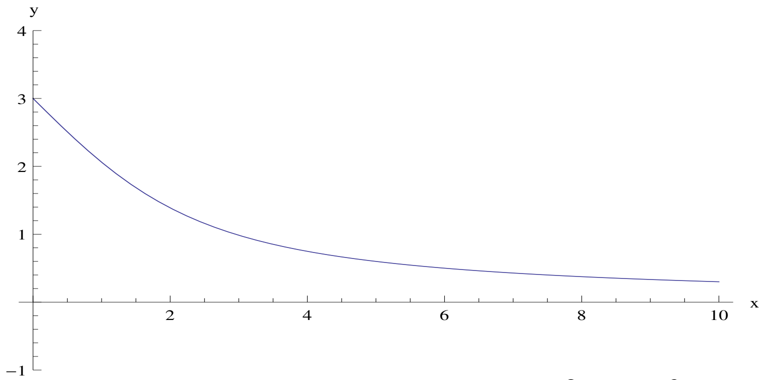


Bild 20 a) (ii) $\quad f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{6}{e^{2x}-1}$

b) Die Nullstellen von $g'(x) = -x^2 + 6x - 8$ lauten $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Die Monotoniebereiche von g ergeben sich aus dem Vorzeichenverhalten von g':

$$g'(x) = -(x-2)(x-4) \begin{cases} < 0 & , \quad x \in \,]-\infty, 2[& \Rightarrow \quad g \text{ streng monoton fallend} \\ = 0 & , \quad x = 2 & \Rightarrow \quad x_1 = 2 \text{ streng lokales Minimum} \\ > 0 & , \quad x \in \,]2, 4[& \Rightarrow \quad g \text{ streng monoton wachsend} \\ = 0 & , \quad x = 4 & \Rightarrow \quad x_2 = 4 \text{ streng lokales Maximum} \\ < 0 & , \quad x \in \,]4, \infty[& \Rightarrow \quad g \text{ streng monoton fallend} \end{cases}$$

Nur beim Funktionsgraphen von $g_3(x) = -x^3/3 + 3x^2 - 8x$ stimmt das Monotonieverhalten mit dem von g überein.

Die Abbildungsvorschriften zu den anderen Funktionsgraphen lauten

$g_1(x) = -x^2 + 6x - 8,$
$g_2(x) = -x^3/3 + 5x^2/2 - 4x,$
$g_4(x) = -8\sin x\,.$