Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. K. Rothe ©

WiSe 2020/21

Analysis I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 6

Horner-Schema

Zur Auswertung des Polynoms

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

mit $x \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ an einer Stelle x_0

kann die Methode des **Horner-Schemas**

(jeweils n Multiplikationen und Additionen) angewendet werden.

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
$+$	$\downarrow$	$\downarrow b_n x_0$	$\cdots$	$\downarrow b_3 x_0$	$\downarrow b_2 x_0$	$\downarrow b_1 x_0$
$x_0 *$	$b_n = a_n \nearrow$	$b_{n-1} = b_n x_0 + a_{n-1} \nearrow$	$\cdots$	$b_2 \nearrow$	$b_1 \nearrow$	$b_0 = p_n(x_0)$

Verwendet man die Koeffizienten $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_2, b_1$ zur

Definition des Polynoms

$$q_{n-1}(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1,$$

so lässt sich die Polynomdivision von $p_n(x)$ durch $x - x_0$

folgendermaßen darstellen

$$\frac{p_n(x)}{x - x_0} = q_{n-1}(x) + \frac{b_0}{x - x_0}\,.$$

Durch wiederholtes Anwenden des Horner-Schemas

auf das jeweils neu enstehende Polynom (oben q_{n-1} mit b_i),

lässt sich das Ausgangspolynom p_n umordnen

nach Potenzen von $x - x_0$

$$p_n(x) = c_n(x-x_0)^n + c_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \cdots + c_2(x-x_0)^2 + c_1(x-x_0) + c_0.$$

Für den Fall $n = 3$ soll die Berechnung der zur Umordnung gehörigen Koeffizienten c_i mit $i = 0, 1, \ldots, n$ erklärt werden.

	a_3	a_2	a_1	a_0
$+$	$\downarrow$	$\downarrow b_3x_0$	$\downarrow b_2x_0$	$\downarrow b_1x_0$
x_0*	$b_3 \nearrow$	$b_2 \nearrow$	$b_1 \nearrow$	$b_0 =: c_0$
$+$	$\downarrow$	$\downarrow d_3x_0$	$\downarrow d_2x_0$	
x_0*	$d_3 \nearrow$	$d_2 \nearrow$	$d_1 =: c_1$	
$+$	$\downarrow$	$\downarrow e_3x_0$		
x_0*	$e_3 \nearrow$	$e_2 =: c_2$		
$+$	$\downarrow$			
	$f_3 =: c_3$			

Taylor-Polynome

Definition:

Gegeben sei eine in $[a, b]$ n-mal stetig differenzierbare Funktionen

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} ,$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in]a, b[$. Dann heißt

$$T_n(x; x_0) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Taylorpolynom n-ten Grades von f
zum **Entwicklungspunkt** x_0.

Das zu $T_n(x; x_0)$ gehörige **Restglied** $R_n(x; x_0)$ bezüglich $f(x)$ wird definiert durch

$$f(x) = T_n(x; x_0) + R_n(x; x_0) .$$

Restgliedformeln:

Ist f sogar $n + 1$-mal stetig differenzierbar, so gelten mit
$\xi := x_0 + \Theta(x - x_0)$ und $0 < \Theta < 1$ und $1 \leq p \leq n + 1$
folgende Restgliedformeln:

nach Lagrange: $$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} ,$$

nach Schlömilch: $$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p \cdot n!}(x - x_0)^{n+1}(1 - \Theta)^{n+1-p} ,$$

nach Cauchy: $$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^{n+1}(1 - \Theta)^{n} ,$$

Integraldarstellung: $$R_n(x; x_0) = \frac{1}{n} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt .$$

Aufgabe 21:

a) Für das Polynom

$$p_2(x) = 5x^2 - 16x + 6$$

berechne man das Taylor-Polynom $T_2(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ unter Verwendung

(i) des Horner-Schemas und

(ii) der Ableitungsregeln für die Koeffizienten.

(i) Das Taylor-Polynom $T_2(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ entspricht der Umordnung des Polynoms

$$p_2(x) = 5x^2 - 16x + 6 = c_2(x-3)^2 + c_1(x-3) + c_0 = T_2(x)$$

nach Potenzen von $x - x_0$.

Die Koeffizienten c_i, $i = 0, 1, 2$ ergeben sich aus dem wiederholt angewendeten Horner-Schema.

	5	-16	6
$+$	$\downarrow$	$\downarrow 15$	-3
$3*$	$5 \nearrow$	$-1 \nearrow$	$3 = c_0$
$+$	$\downarrow$	$\downarrow 15$	
$3*$	$5 \nearrow$	$14 = c_1$	
$+$	$\downarrow$		
	$5 = c_2$		

Man erhält $p_2(x) = T_2(x) = 5(x-3)^2 + 14(x-3) + 3$

(ii) Mit den Ableitungen von p_2

$$p_2'(x) = 10x - 16\,, \quad p_2''(x) = 10$$

erhält man

$$\begin{aligned} p_2(x) = T_2(x) &= \frac{p_2''(3)}{2!}(x-3)^2 + \frac{p_2'(3)}{1!}(x-3) + p_2(3) \\ &= \frac{10}{2}(x-3)^2 + \frac{14}{1}(x-3) + 3 \\ &= 5(x-3)^2 + 14(x-3) + 3 \end{aligned}$$

b) Man berechne das Taylor-Polynom vom Grad 3 für die durch

$$f(x) = e^{(x-\pi/2)} \sin x$$

gegebene Funktion zum Entwicklungspunkt $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ und schätze den maximalen Approximationsfehler

$$|f(x) - T_3(x)|$$

für $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ mit Hilfe der Restgliedformel von Lagrange nach oben ab.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{(x-\pi/2)} \sin x &, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \\
f'(x) &= e^{(x-\pi/2)} (\sin x + \cos x) &, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \\
f''(x) &= 2e^{(x-\pi/2)} \cos x &, \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\
f'''(x) &= 2e^{(x-\pi/2)} (\cos x - \sin x) &, \quad f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= \frac{f'''(\pi/2)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{f''(\pi/2)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\
&\quad + \frac{f'(\pi/2)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1
\end{aligned}$$

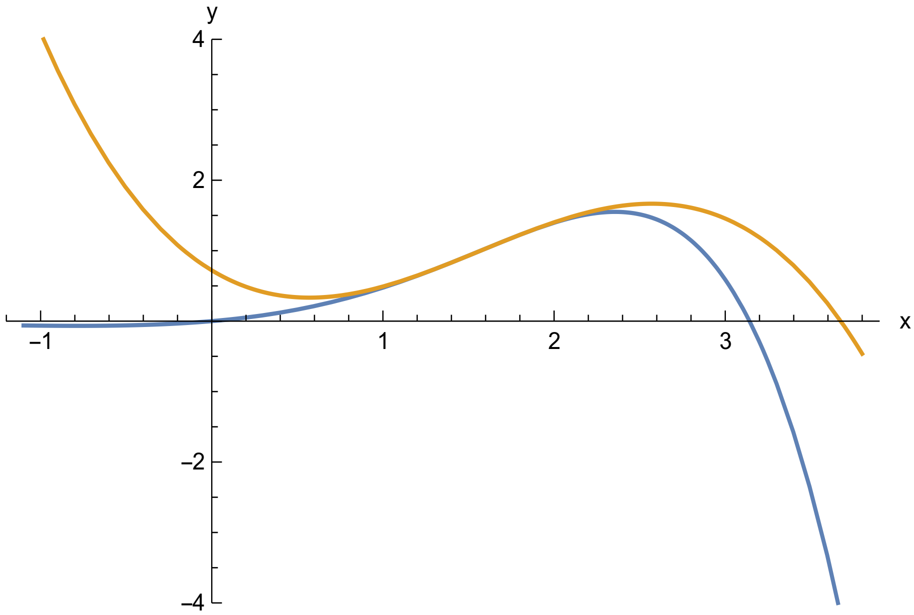

Bild 21 : $f(x) = e^{(x-\pi/2)} \sin x$ und $T_3(x)$

Für die Fehlerabschätzung wird die vierte Ableitung von f benötigt.

$$f^{(iv)}(x) \;=\; -4e^{(x-\pi/2)} \sin x$$

Fehlerformel von Lagrange mit
$\xi := x_0 + \Theta(x - x_0)$ und $0 < \Theta < 1$

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Mit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ gilt für die Zwischenstelle ξ in der Fehlerformel von Lagrange

$$0 \leq x < \xi < \frac{\pi}{2} = x_0 \,.$$

Fehlerabschätzung mit Hilfe des Restgliedes von Lagrange

$$\begin{aligned}
|f(x) - T_3(x)| &= |R_3(x)| = \frac{1}{4!}\left|f^{(iv)}(\xi)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4\right| \\
&= \frac{1}{4!}\left|-4e^{(\xi-\pi/2)}\sin\xi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4\right| \\
&= \frac{e^{(\xi-\pi/2)}}{6}|\sin\xi|\cdot\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^4 \\
&\le \frac{e^0}{6}\cdot 1\cdot\left|\frac{\pi}{2}\right|^4 \\
&= \frac{\pi^4}{96} = 1.0146....
\end{aligned}$$

Der maximale Fehler für $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ wird in $x = 0$ angenommen (vgl. Funktionsgraphen) und beträgt

$$|f(0) - T_3(0)| = \left|-\frac{1}{3}\left(0-\frac{\pi}{2}\right)^3 + \left(0-\frac{\pi}{2}\right) + 1\right| = 0.72113...$$

Extremwerte

Kriterien für Extremwerte:

a) **hinreichende Bedingung II**:
Es sei f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion in $[a, b]$.

Gilt $f'(x_0) = 0$ für $x_0 \in \,]a, b[$ und

(i) $f''(x_0) < 0$,
dann besitzt f in x_0 ein strenges lokales Maximum,

(ii) $f''(x_0) > 0$,
dann besitzt f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

b) **Randpunkte**:
Es sei f eine stetig differenzierbare Funktion in $[a, b]$ und $0 < \varepsilon \leq b - a$. Gilt

(i) $f'(x) < 0$ für $x \in \, [a, a + \varepsilon]$,
dann besitzt f in a ein strenges lokales Maximum,

(ii) $f'(x) > 0$ für $x \in \, [b - \varepsilon, b]$,
dann besitzt f in b ein strenges lokales Maximum.

Bei Umkehrung der Ungleichung erhält man eine entsprechende Bedingung für ein Minimum.

Konvexe und konkave Funktionen

Kriterien für Konvexität:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.

a) Es gilt $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[\;\Leftrightarrow\; f(x)$ ist konvex.

b) Es gilt $f''(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[\;\Rightarrow\; f(x)$ ist streng konvex.

c) Es gilt $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in]a, b[\;\Leftrightarrow\; f(x)$ ist konkav.

d) Es gilt $f''(x) < 0$ für alle $x \in]a, b[\;\Rightarrow\; f(x)$ ist streng konkav.

Definition:

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ besitzt in $]a, b[$

einen **Wendepunkt** in x_0, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

a) f konvex in $]x_0 - \varepsilon, x_0[$ und
konkav in $]x_0, x_0 + \varepsilon[$ ist (Links-Rechtskurve) oder

b) f konkav in $]x_0 - \varepsilon, x_0[$ und
konvex in $]x_0, x_0 + \varepsilon[$ ist (Rechts-Linkskurve).

Kriterien für Wendepunkte:

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in \,]a,b[$.

a) **notwendige Bedingung**:

x_0 ein Wendepunkt $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$

b) **hinreichende Bedingung**:

(i) $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) > 0$
$\Rightarrow$ x_0 ein Wendepunkt (Rechts-Linkskurve)

(ii) $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) < 0$
$\Rightarrow$ x_0 ein Wendepunkt (Links-Rechtskurve)

Aufgabe 22:

a) Für die durch $f(x) = (x-1)^2\sqrt{x}$ gegebene Funktion gebe man im maximalen Definitionsbereich das Monotonieverhalten an, bestimme und klassifiziere alle Extremwerte und zeichne den Funktionsgraphen von f.

Die Funktion $f(x) = (x-1)^2\sqrt{x}$ ist nur für $x \geq x_1 = 0$ definiert.

Außerdem gilt $f(x) = (x-1)^2\sqrt{x} \geq 0$.

$\Rightarrow$ $x_1 = 0$ und $x_3 = 1$ sind wegen $f(x_{1,3}) = 0$ globale Minima.

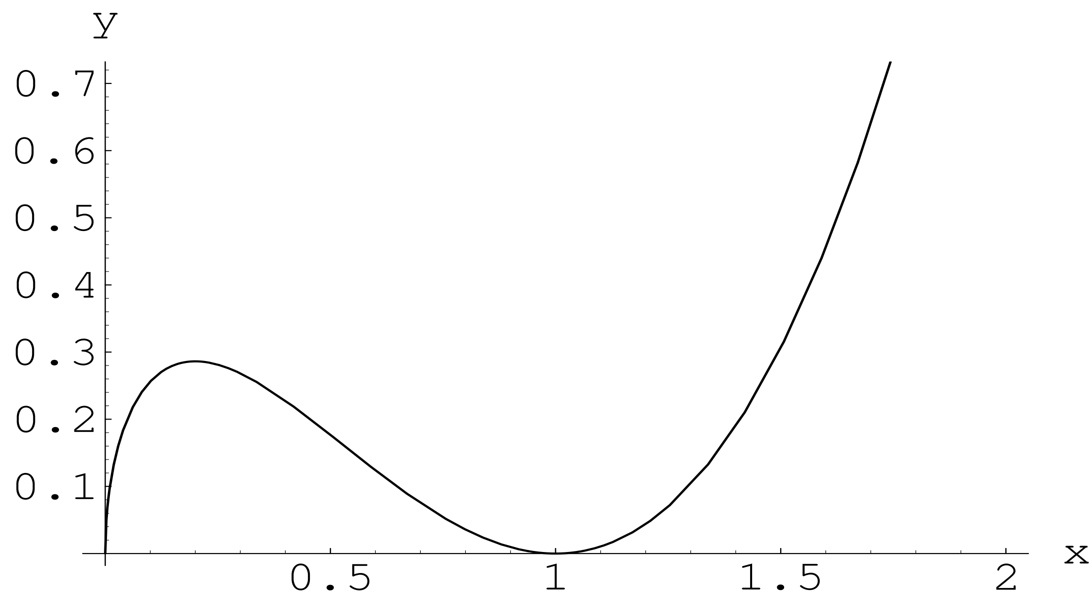

Bild 22 a) $f(x) = (x-1)^2\sqrt{x}$

Das Monotonieverhalten erhält man aus der Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-1)\sqrt{x} + \frac{(x-1)^2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{4x(x-1)+(x-1)^2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{(x-1)(5x-1)}{2\sqrt{x}} \qquad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$f'(x) \begin{cases} & x = 0 & \text{strenges lokales Minimum} \\ > 0 \ , & 0 < x < 1/5 & \text{streng monoton wachsend} \\ = 0 \ , & x_2 = 1/5 & \text{strenges lokales Maximum} \\ < 0 \ , & 1/5 < x < 1 & \text{streng monoton fallend} \\ = 0 \ , & x_3 = 1 & \text{strenges lokales Minimum} \\ > 0 \ , & 1 < x & \text{streng monoton wachsend} \ . \end{cases}$$

b) Man bestimme für die durch

$$g(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$$

gegebene Funktion im Intervall $[-4, 4]$ alle Wendepunkte und die Bereiche in denen g konvex bzw. konkav ist und zeichne den Funktionsgraphen von g.

$g(x) = x^4 - 2x^3 + 2x\ ,$

$g'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2\ ,$

$g''(x) = 12x^2 - 12x\ ,$

$g'''(x) = 24x - 12\ ,$

Berechnung der Wendepunktkandidaten:

$$g''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

Hinreichende Bedingung für die Wendepunktkandidaten, d.h. es gilt $g''(x) = 0$

$$g'''(0) = -12 < 0\ , \quad g'''(1) = 12 > 0.$$

Damit sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ Wendepunkte.

Das Krümmungsverhalten ergibt sich
aus dem Vorzeichenverhalten von $g''(x)$.

$$g''(x) = 12x(x-1) \begin{cases} > \ 0 \ , \ x < 0 & \text{konvex} \\ = \ 0 \ , \ x_1 = 0 & \text{Wendepunkt} \\ < \ 0 \ , \ 0 < x < 1 & \text{konkav} \\ = \ 0 \ , \ x_2 = 1 & \text{Wendepunkt} \\ > \ 0 \ , \ 1 < x \leq 4 & \text{konvex} \end{cases}$$

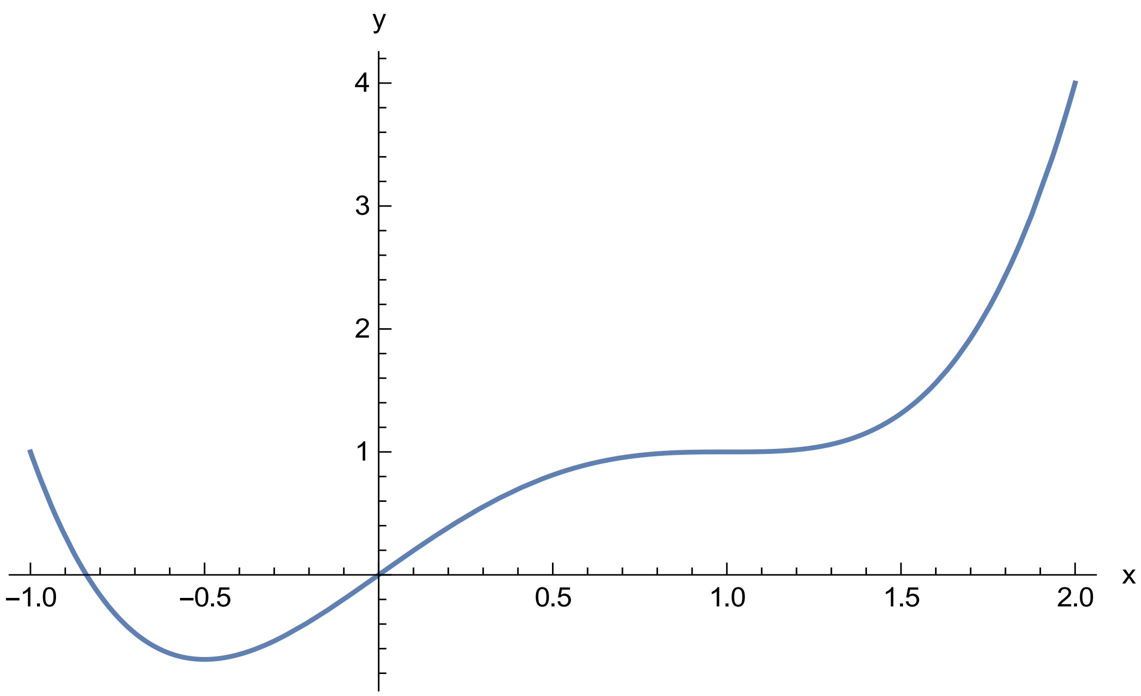

Bild 22 b) $g(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$

Fixpunkte

Definition:

Gegeben sei eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

a) $x^* \in [a, b]$ heißt **Fixpunkt** von f, falls $x^* = f(x^*)$ gilt.

b) f heißt **kontrahierend** auf $[a, b]$,
falls eine Konstante $0 < L < 1$ existiert,
diese heißt dann **Kontraktionskonstante**,
so dass für alle $x, y \in [a, b]$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \,.$$

Banachscher Fixpunktsatz:

Erfüllt die stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ die Bedingungen $f([a, b]) \subset [a, b]$ und ist f kontrahierend auf $[a, b]$, dann gilt

a) f besitzt genau einen Fixpunkt $x^* \in [a, b]$,

b) für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$ konvergiert
die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

gegen den Fixpunkt x^* und es gelten
die **Fehlerabschätzungen**

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{L^2}{1-L}|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|.$$

Bemerkungen:

a) Da die Fehlerabschätzung über die rechte Ungleichung direkt nach der Berechnung von x_1 für alle $n \geq 1$ möglich ist, bezeichnet man sie auch als **a priori-Abschätzung**. Die Fehlerabschätzung über die linke Ungleichung ist erst nach der Berechnung von x_n möglich und wird entsprechend als **a posteriori-Abschätzung** bezeichnet.

b) Ist f stetig differenzierbar auf $[a, b]$, so existiert nach dem Mittelwertsatz für $x, y \in [a, b]$ ein $\xi = x + \theta(y - x)$ mit $0 < \theta < 1$ und es gilt

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq \underbrace{\max_{t\in[a,b]} |f'(t)|}_{=L} \cdot |x - y| \,.$$

Gilt $L := \max_{t\in[a,b]} |f'(t)| < 1$, so ist f kontrahierend auf $[a, b]$.

c) Gilt für die stetig differenzierbare Funktion f im Fixpunkt $|f'(x^*)| < 1$, so heißt x^* **anziehender Fixpunkt** und es gibt ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$, dass die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, also zu einer gegen x^* konvergenten Fixpunktiteration führt.

d) Gilt für die stetig differenzierbare Funktion f im Fixpunkt $|f'(x^*)| > 1$, so heißt x^* **abstoßender Fixpunkt** und es gibt kein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$, dass die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Die Fixpunktiteration (mit $x_0 \neq x^*$) wird in diesem Fall nicht gegen x^* konvergieren.

Aufgabe 23:

Gegeben sei die durch $\Phi(x) = e^{-x^2}$ definierte Funktion.

a) Man zeige, dass Φ genau einen Fixpunkt x^* besitzt.

Für einen Fixpunkt muss

$$x = \Phi(x) = e^{-x^2} \quad (> 0)$$

gelten.

Damit ist das Fixpunktproblem äquivalent zum Nullstellenproblem in g:

$$x = e^{-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = -x^2 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) := x^2 + \ln x = 0\,.$$

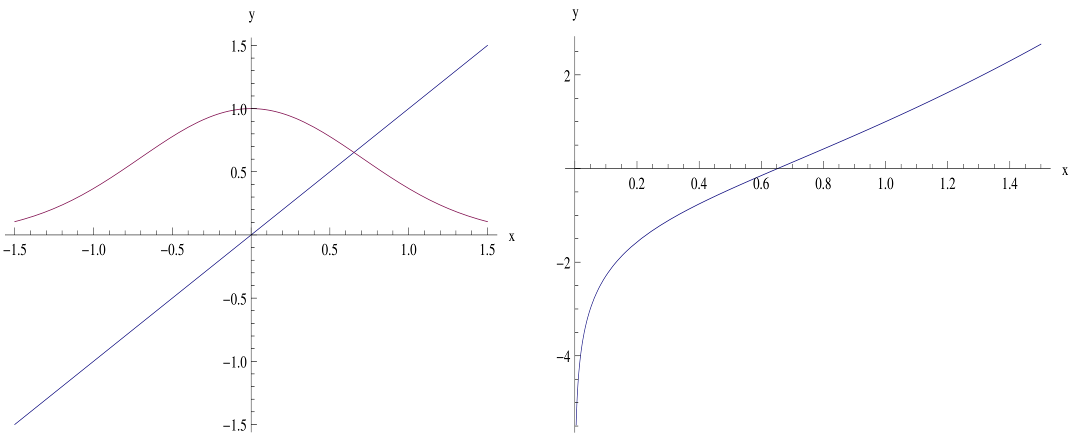

Bild 23 a) (i) $\Phi(x) = e^{-x^2}$ **(ii)** $g(x) = x^2 + \ln x$

Da $g'(x) = 2x + 1/x = \dfrac{2x^2+1}{x} > 0$ keine Nullstelle besitzt, hat g nach dem Satz von Rolle höchstens eine Nullstelle.

Wegen $-1.114 = g(0.3) < 0 < g(1) = 1$ besitzt g nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle $x^* \in [0.3, 1]$.

b) Man gebe ein Intervall D an, in dem die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

für jeden Startwert $x_0 \in D$ auf Grund des Fixpunktsatzes gegen x^* konvergiert.

Wieviele Iterationsschritte n werden
nach der a priori-Abschätzung für eine Genauigkeit
von $|x_n - x^*| < 10^{-3}$ höchstens benötigt?

Für das Intervall $D = [0.3, 1]$ werden die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes überprüft:

(i) D ist ein abgeschlossens Intervall.

(ii) Da $\Phi'(x) = -2xe^{-x^2} < 0$ gilt, fällt Φ monoton.
Es gilt also

$$\Phi(D) = [\Phi(1), \Phi(0.3)] = [0.367879, 0.913931] \subset [0.3, 1] = D.$$

(iii) Φ ist stetig differenzierbar.
Eine Kontraktionskonstante in D erhält man durch

$$L = \max_{0.3 \le x \le 1} |\Phi'(x)| = \max_{0.3 \le x \le 1} 2xe^{-x^2}.$$

Die einfache Abschätzung

$$L = \max_{0.3 \le x \le 1} 2xe^{-x^2} \le 2 \cdot 1 \cdot e^{-0.3^2} = 1.82786...$$

ist zu grob und führt hier nicht zum Erfolg.

Also berechnen wir das Maximum von $2xe^{-x^2}$.

Das Maximum von $-\Phi'(x) = 2xe^{-x^2}$ für $x > 0$
lautet $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, denn

$$-\Phi''(x) = (2 - 4x^2)e^{-x^2} = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106$$

$$-\Phi'''(x) = (8x^3 - 12x)e^{-x^2} \Rightarrow -\Phi'''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3.43106 < 0.$$

$$\Rightarrow\; L = -\Phi'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{e}} = 0.857764 < 1,$$

d.h. Φ ist kontrahierend auf D.

Damit sind die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt.

Es gibt also genau einen Fixpunkt $x^* \in D$,
das Fixpunktverfahren konvergiert
für jeden Startwert $x_0 \in D$ gegen x^* und
es gelten die a priori- und a posteriori-Fehlerabschätzung.

Die Anzahl der Iterationsschritte, die zur näherungsweisen Berechnung des Fixpunktes mit $|x_n - x^*| < 10^{-3}$ höchstens erforderlich sein wird, kann aus der a priori-Fehlerabschätzung ermittelt werden.

Für den Startwert $x_0 = 1$ erhält man
$n = 55$ Iterationsschritte, denn:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| < 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \quad n > \frac{\ln\left(\frac{1-L}{1000|x_1-x_0|}\right)}{\ln L} = \frac{\ln\left(\frac{1-0.857764}{1000|0.367879-1|}\right)}{\ln 0.857764} = 54.7452\,.$$

Bemerkung:
Für das kleinere Intervall $\tilde{D} = [0.6, 0.7]$ hätte sich das Überprüfen der Voraussetzungen des Fixpunktsatzes vereinfacht:

(i) $\tilde{D}$ ist abgeschlossen.

(ii) Da $\Phi'(x) = -2xe^{-x^2} < 0$ gilt, fällt Φ monoton.
Es gilt also

$$\Phi(\tilde{D}) = [\Phi(0.7), \Phi(0.6)] = [0.612626, 0.697677] \subset [0.6, 0.7] = \tilde{D}.$$

(iii) Φ ist stetig differenzierbar.
Eine Kontraktionskonstante in $\tilde{D}$ erhält man durch

$$\max_{0.6\leq x\leq 0.7} |\Phi'(x)| = \max_{0.6\leq x\leq 0.7} 2xe^{-x^2} \leq 2\cdot 0.7e^{-0.6^2} = 0.97675 =: L,$$

d.h. Φ ist kontrahierend auf $\tilde{D}$.

c) Man berechne den Fixpunkt
mit einem absoluten Fehler von $|x_n - x^*| < 10^{-3}$.

Ein Matlab-Programm zur Fixpunktberechnung

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|$$

mit a posteriori-Fehlerabschätzung als Abbruchkriterium:

```
function x = fixpunkt(x0,eps,funkt,L)
%--------------------------------------------------------
% Berechnet einen Fixpunkt mit Hilfe
% des Fixpunktverfahrens
%
% Input:    x0    Startwert
%           eps   Genauigkeit
%           funkt Verfahrensfunktion
%           muss als inline Funktion definiert sein,
%                 z.B.: funkt=inline('exp(-x^2)','x')
%           L     Lipschitzkonstante,
%                 falls unbekannt, L>1 setzen
%
% interne
% Variable: n     zählt die Iterationsschritte
%           x     nächste Iterierte
%
% Output:   x     Fixpunktnäherung
%
```

```
% Kai Rothe, März-2013.
%-----------------------------------------------------------------------
  n=0;
  [n x0]
  x = funkt(x0);
  if(0<L & L<1)
    while(L*abs(x-x0)/(1-L)>eps)
      x0 = x;
      n=n+1;
      [n x0]
      x  =  funkt(x0);
    end
  else
    while(abs(x-x0)>eps)
      x0 = x;
      n=n+1
      x  =  funkt(x0)
    end
  end
```

```
>> funkt=inline('exp(-x^2)','x')
>> fixpunkt(1,0.001,funkt,0.857764)
k   x_k
0   1.000000000000000
1   0.367879441171442
2   0.873423018493117
3   0.466327188849762
4   0.804558944245307
5   0.523449303524930
```

6	0.760332703781490
7	0.560959919675917
8	0.730025341190366
9	0.586878773758940
10	0.708626496085312
11	0.605227105163029
12	0.693294886383425
13	0.618376490253921
14	0.682229284267378
15	0.627860798004814
16	0.674213008484768
17	0.634725167534274
18	0.668394949561601
19	0.639702657272359
20	0.664168438177241
21	0.643315687894463
22	0.661096754239330
23	0.645939832252161
24	0.658863915784303
25	0.647846392382618
26	0.657240711315025
27	0.649231870485364
28	0.656060662064603
29	0.650238804316043
30	0.655202780546884
31	0.650970675152818
32	0.654579116633342
33	0.651502646714191

```
34  0.654125729751525
35  0.651889330263142
36  0.653796133295116
37  0.652170411475896
38  0.653556530399603
39  0.652374732911592
40  0.653382350384373

41  0.652523258118945
42  0.653255730461682
43  0.652631224682351
44  0.653163684693425
45  0.652709708553056
46  0.653096772671291
47  0.652766760830746
48  0.653048131569901
49  0.652808233939293
50  0.653012772417529

51  0.652838382107290
52  0.652987068477312
```

Die gewählte Kontraktionskonstante

$$L = 0.857764...$$

konnte wegen $\Phi'(0.652987068477312) = 0.852619...$

also nicht wesentlich verbessert werden.

Konvergenzgeschwindigkeit

Definition: **(Konvergenzgeschwindigkeit)**

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Grenzwert a:

a) **lineare Konvergenz**:
es existieren $0 < C < 1$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt
$$|a_{n+1} - a| \leq C|a_n - a|$$

b) **quadratische Konvergenz**:
es existiert $C \geq 0$, so dass für alle $n \geq N$ gilt
$$|a_{n+1} - a| \leq C|a_n - a|^2$$

c) **Konvergenz der Ordnung** p:
es existieren $C \geq 0$ und $p > 1$, so dass für alle $n \geq N$ gilt
$$|a_{n+1} - a| \leq C|a_n - a|^p$$

Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren für $f(x^*) = 0$

erzeugt mit einem Startwert x_0 eine rekursive

und unter geeigneten Bedingungen

lokal quadratisch konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Dabei berechnet sich das Folgenglied x_{n+1}
als Nullstelle der Tangente $T(x)$ an $f(x)$ in $x = x_n$:

$$T(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Aufgabe 24:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x(2-x)\ ,$$

sowie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von f mittels Startwert $x_0 \leq 0$ ergibt.

Die Funktion $f(x) = x(2-x)$ besitzt genau

die Nullstellen $x^* = 0$ und $x^{**} = 2$.

Die durch f gegebene Newton-Folge lautet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n(2-x_n)}{2(1-x_n)} = -\frac{x_n^2}{2(1-x_n)}\ .$$

a) Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle x^* konvergiert und berechne diese.

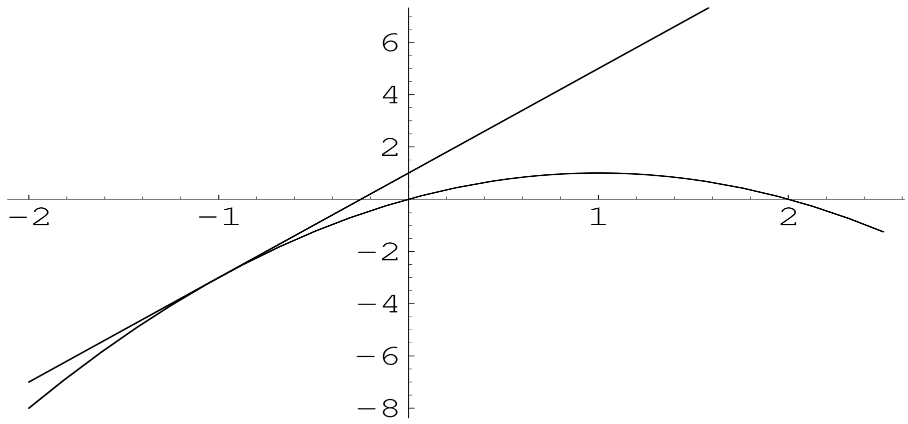

Bild 24: $f(x) = x(2-x)$ mit Tangente für $x_0 < 0$

Da $x_0 \leq 0$ vorausgesetzt ist,
liegt aufgrund der Anschauung die Vermutung nahe,
dass die Newton-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend
gegen die Nullstelle $x^* = 0$ konvergiert.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt durch Null.

Beweis über Induktion:

$n = 0: \quad x_0 \leq 0$

$$n \to n+1: \quad x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{2(1-x_n)} \leq 0 \quad \text{wegen} \quad x_n \leq 0$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wächst monoton.

Beweis direkt: für $x_n \leq 0$ gilt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n(2-x_n)}{2(1-x_n)} \quad \Rightarrow$$

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{x_n(2-x_n)}{2(1-x_n)} \geq 0$$

Damit konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle.

Wegen $x_n \leq 0$ gilt $\quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^* = 0$.

b) Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2 \,.$$

Mit $x^* = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x^*| &= |x_{n+1}| \\ &= \left| -\frac{x_n^2}{2(1-x_n)} \right| \\ &= \frac{|x_n - x^*|^2}{|2(1-x_n)|} \\ &\leq \frac{1}{2}|x_n - x^*|^2 \end{aligned}$$

Für den Startwert $x_0 = -1$ erhält man:

$$\begin{aligned} x_0 &= -1 \\ x_1 &= -0.25 \\ x_2 &= -0.025 \\ x_3 &= -0.0003048... \\ x_4 &= -0.00000004646... \\ x_5 &= -0.000000000000001079... \end{aligned}$$