Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe ©

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 1

Aufgabe 1:

a) Man multipliziere aus: $(2a-5b)(b+a)-(4b+3a)(a-b)$.

b) Man klammere aus: $7a^2bx+21xy^3+7a^2bz^2+21y^3z^2$.

c) Man addiere die folgenden Brüche:

$$\text{(i) } \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\,, \quad \text{(ii) } \frac{x}{x-3}+\frac{3}{2x}\,, \quad \text{(iii) } \frac{4x}{x-2}-\frac{2}{x^2-4}.$$

d) Durch Potenzrechengesetze vereinfache man die Terme:

$$\text{(i) } \sqrt{25y^4z^8}+\sqrt{144(yz^2)^4}\,, \quad \text{(ii) } \sqrt{25y^4z^8+144(yz^2)^4}.$$

e) Mit Hilfe der binomischen Formeln fasse man folgende Terme zusammen:

$$\text{(i) } x^2-6xy+9y^2\,, \quad \text{(ii) } 4a^4-12a^2b^2+9b^4\,, \quad \text{(iii) } 147a^2b-75b^3.$$

Lösung:

a) $(2a-5b)(b+a)-(4b+3a)(a-b)$
$= 2ab+2a^2-5b^2-5ab-(4ab-4b^2+3a^2-3ab) = -a^2-4ab-b^2$

b) $7a^2bx+21xy^3+7a^2bz^2+21y^3z^2 = 7a^2b(x+z^2)+21y^3(x+z^2) = 7(a^2b+3y^3)(x+z^2)$

c) (i) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} = \dfrac{a^2}{ab}+\dfrac{b^2}{ab} = \dfrac{a^2+b^2}{ab}$

(ii) $\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{3}{2x} = \dfrac{2x^2}{2x(x-3)}+\dfrac{3(x-3)}{2x(x-3)} = \dfrac{2x^2+3x-9}{2x(x-3)}$

(iii) $\dfrac{4x}{x-2}-\dfrac{2}{x^2-4} = \dfrac{4x(x+2)}{(x+2)(x-2)}-\dfrac{2}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{2(2x^2+4x-1)}{x^2-4}$

d) (i) $\sqrt{25y^4z^8}+\sqrt{144(yz^2)^4} = (25y^4z^8)^{1/2}+(144(yz^2)^4)^{1/2}$
$= 25^{1/2}y^{4/2}z^{8/2}+144^{1/2}(yz^2)^{4/2} = 5y^2z^4+12y^2z^4 = 17y^2z^4$

(ii) $\sqrt{25y^4z^8+144(yz^2)^4} = (25y^4z^8+144y^4z^8)^{1/2} = (169y^4z^8)^{1/2} = 13y^2z^4$

e) (i) $x^2-6xy+9y^2 = x^2-2x(3y)+(3y)^2 = (x-3y)^2$

(ii) $4a^4-12a^2b^2+9b^4 = (2a^2)^2-2(2a^2)(3b^2)+(3b^2)^2 = (2a^2-3b^2)^2$

(iii) $147a^2b-75b^3 = 3b((7a)^2-(5b)^2) = 3b(7a+5b)(7a-5b)$

Aufgabe 2:

Was stimmt an folgenden Rechnungen nicht:

a) Für ein festes $y \in \mathbb{R}$ werde $x \in \mathbb{R}$ durch $3x = 5y$ berechnet

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 10y - 6x &= 15y - 9x \\
\Rightarrow \quad 20y - 12x &= 30y - 18x \\
\Rightarrow \quad 20y + 10xy - 30y^2 - 12x + 18xy - 6x^2 &= 30y + 10xy - 30y^2 - 18x + 18xy - 6x^2 \\
\Rightarrow \quad 10y(2 + x - 3y) - 12x + 18xy - 6x^2 &= 10y(3 + x - 3y) - 18x + 18xy - 6x^2 \\
\Rightarrow \quad 10y(2 + x - 3y) - 6x(2 + x - 3y) &= 10y(3 + x - 3y) - 6x(3 + x - 3y) \\
\Rightarrow \quad (10y - 6x)(2 + x - 3y) &= (10y - 6x)(3 + x - 3y) \\
\Rightarrow \quad 2 + x - 3y &= 3 + x - 3y \\
\Rightarrow \quad 2 &= 3
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
x &= -2 \\
\Rightarrow \quad 2x^2 &= -4x \\
\Rightarrow \quad 2x^2 + 4x + 2 &= 2 \\
\Rightarrow \quad 2(x^2 + 2x + 1) &= 2 \\
\Rightarrow \quad (x + 1)^2 &= 1 \\
\Rightarrow \quad x + 1 &= 1 \\
\Rightarrow \quad x &= 0\,.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
0 &< \log 2 \\
\Rightarrow \quad \log 2 &< \log 2 + \log 2 = \log 4 \\
\Rightarrow \quad \log\left(4 \cdot \frac{1}{2}\right) &< \log\left(8 \cdot \frac{1}{2}\right) \\
\Rightarrow \quad \log 4 + \log\left(\frac{1}{2}\right) &< \log 8 + \log\left(\frac{1}{2}\right) \\
\Rightarrow \quad \log(4) \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\log\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 &< \log(8) \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\log\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \\
\Rightarrow \quad \log(4)\,(\log 1 - \log 2) &< \log(8)\,(\log 1 - \log 2) \\
\Rightarrow \quad -\log(2) \cdot \log(4) &< -\log(2)\log(8) \\
\Rightarrow \quad \log(2)\,(\log(8) - \log(4)) &< 0 \\
\Rightarrow \quad (\log 2)^2 &< 0
\end{aligned}$$

Lösung:

a) $3x = 5y \quad \Leftrightarrow \quad 10y - 6x = 0\,,$ die vorletzte Implikation ist also falsch.

b) Die Implikationen stimmen bis zur Gleichnung $(x+1)^2 = 1\,,$ dann wird die Wurzel gezogen. Hier gibt es zwei Lösungen. Eine richtige Fortsetzung wäre

$$\Rightarrow \quad (x+1)^2 \;=\; 1 \quad \Rightarrow \quad x+1 \;=\; \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x \;=\; 0 \quad \text{oder} \quad x = -2\,.$$

c) Mit $\log$ werde der Logarithmus zur Basis 10 bezeichnet. Für $x, y \in \mathbb{R}^+$ und $k \in \mathbb{Z}$ gelten dann die bekannten Rechenregeln

$$\log(1) = 0, \quad \log(x \cdot y) = \log x + \log y, \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y, \quad \log(x^k) = k \cdot \log x.$$

Die 4. Implikation gilt nicht, da sich durch Multiplikation mit $\log\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ die Ungleichung umdreht.

Aufgabe 3:

a) Man schreibe um in eine Summe bzw. ein Produkt:

(i) $1-4+7-10+13\mp\cdots+31 \;=\; \sum_{k=0}^{?}\cdots$

(ii) $\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{16}{20}\cdot\cdots\cdot\frac{131072}{85} \;=\; \prod_{n=1}^{?}\cdots$

b) Man beweise direkt:

(i) $1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q\neq 1$,

(ii) $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Lösung:

a) (i) $1-4+7-10+13\mp\cdots+31 \;=\; \sum_{k=0}^{10}(-1)^k(3k+1)$

(ii) $\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{16}{20}\cdot\cdots\cdot\frac{131072}{85} \;=\; \prod_{n=1}^{17}\frac{2^n}{5n}$

b) (i) Es gilt $(1+q+q^2+\cdots+q^n)(1-q)=1-q^{n+1}$, mit $q\neq 1$ folgt die Behauptung.

(ii)
$$\begin{aligned}
& 2\cdot(1+2+3+\cdots+n)\\
=\; & (1+2+3+\cdots+n)+(1+2+3+\cdots+n)\\
=\; & \underbrace{1+n}+\underbrace{2+(n-1)}+\underbrace{3+(n-2)}\cdots+\underbrace{(n-1)+2}+\underbrace{n+1}\\
=\; & n(n+1)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4:

a) Man gebe alle reellen Zahlen x an, für die $|3x+4|-3<2x+3$ gilt.

b) Man berechne alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$, für die gilt

(i) $x+1=\sqrt{(x-1)^2}$,

(ii) $\sqrt{(x+1)^2}=x-1$.

Lösung:

a) <u>1.Fall:</u> $0 \le 3x+4 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \le x$

$3x+4-3<2x+3 \quad \Leftrightarrow \quad x<2 \quad \Rightarrow \quad x \in \left[-\frac{4}{3},2\right[$

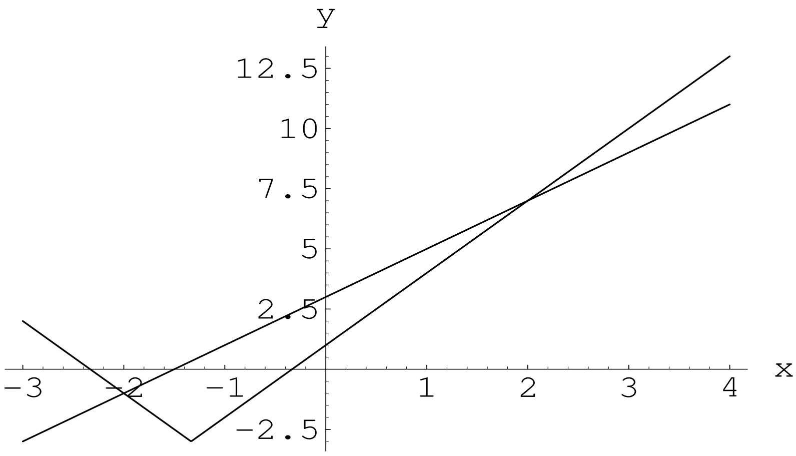

Bild 4 a): $f(x)=|3x+4|-3$, $g(x)=2x+3$

<u>2.Fall:</u> $3x+4<0 \Leftrightarrow x<-\frac{4}{3}$

$-(3x+4)-3<2x+3 \quad \Leftrightarrow \quad -10<5x \quad \Leftrightarrow \quad -2<x \quad \Rightarrow \quad x \in \left]-2,-\frac{4}{3}\right[$

Insgesamt gilt die Ungleichung also für $x \in \left]-2,2\right[$.

b) (i) $x + 1 = \sqrt{(x-1)^2} \;\Rightarrow\; (x+1)^2 = (x-1)^2$

$\Rightarrow\; x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1$

$\Rightarrow\; 4x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$

Einsetzen in die Gleichung bestätigt $x = 0$ als Lösung.

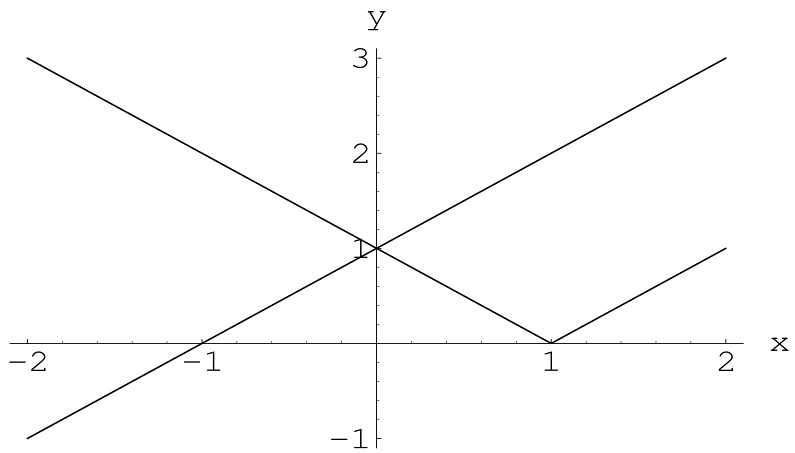

Bild 4 b) (i): $f(x) = x + 1\,,\quad g(x) = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$

(ii) $\sqrt{(x+1)^2} = x - 1 \;\Rightarrow\; (x+1)^2 = (x-1)^2 \;\Rightarrow\; x = 0$

Einsetzen in die Gleichung bestätigt $x = 0$ nicht als Lösung.

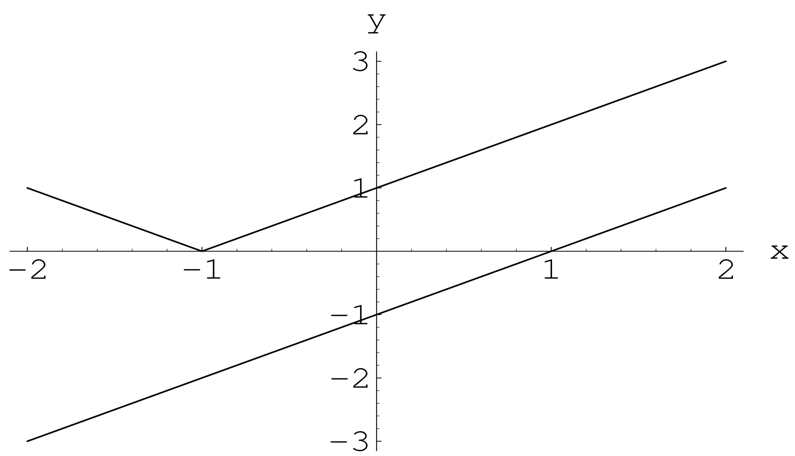

Bild 4 b) (ii): $f(x) = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|\,,\quad g(x) = x - 1$

Bearbeitungstermin: 2.11. - 6.11.20 (während der Übung)