

# Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 2

### Aufgabe 5:

a) Man zeige, dass folgende Aussage eine Tautologie ist

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B).$$

b) Man beweise: für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt  $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

- (i) indirekt,
- (ii) direkt.

### Aufgabe 6:

Man stelle die folgenden Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente dar

a)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 - 3x^2 - x + 3 \geq 0\},$

b)  $B = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \mid \frac{1}{(x-3)^2} + 7 = 2x\right\},$

c)  $C = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1}{27} \leq 3^x < 243\right\}.$

d) Man bilde die Mengen  $A \setminus C$ ,  $B \setminus C$ ,  $B \cup C$ ,  $A \cap C$ .

**Aufgabe 7:**

Man beweise für alle  $n \in \mathbb{N}$  durch vollständige Induktion

a) 
$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

b) 
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}},$$

c)  $a_n := (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$  ist durch 9 teilbar.

**Aufgabe 8:**

- a) Für die Binomialkoeffizienten mit  $n, m \in \mathbb{N}$  weise man folgende Beziehungen nach:

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

- b) Man bestimme für die Zahlen 119301 und 43010 die Primfaktorzerlegung, den ggT und das kgV.
- c) Man wandle die rationale Zahl  $r$  mit der periodischen Zifferndarstellung  $r = 2.\overline{18}$  um in einen Bruch.
- d) Man beweise indirekt, dass  $\log_2 6$  irrational ist.

**Fragen zur Vorlesung:**

- a) Beschreiben Sie zunächst anschaulich, welche Eigenschaft einer Funktion die Bijektivität beschreibt.
- b) Veranschaulichen Sie dies graphisch.
- c) Geben Sie die Definition für eine bijektive Funktion an. Seien Sie dabei ausführlich.
- d) Konstruieren Sie nun je ein Beispiel einer bijektiven als auch einer nicht bijektiven Funktion.

**Abgabetermin:** 16.11. - 20.11.20 (zu Beginn der Übung)