Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe ©

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 2

Aufgabe 5:

a) Man zeige, dass folgende Aussage eine Tautologie ist

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)\ .$$

b) Man beweise: für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

(i) indirekt,

(ii) direkt.

Lösung:

a)

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1

b) Voraussetzung: $A : \forall a, b \in \mathbb{R}$ gilt $(a-b)^2 \geq 0$

Behauptung: $B : \forall a, b \in \mathbb{R}$ gilt $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

(i) indirekter Beweis:

$$\neg B : \exists a, b \in \mathbb{R} : \quad ab > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \exists a, b \in \mathbb{R} : \quad 4ab > a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Rightarrow \quad \exists a, b \in \mathbb{R} : \quad 0 > a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \quad : \neg A$$

(ii) direkter Beweis:

$$A : \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad : \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad : \quad a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$\Rightarrow \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad : \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \geq ab \quad : B.$$

Aufgabe 6:
Man stelle die folgenden Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente dar

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 - 3x^2 - x + 3 \geq 0\}$,

b) $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \;\middle|\; \dfrac{1}{(x-3)^2} + 7 = 2x \right\}$,

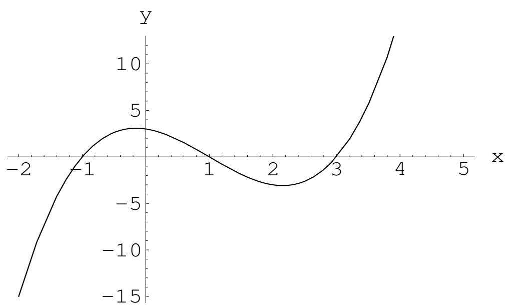
c) $C = \left\{ x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \dfrac{1}{27} \leq 3^x < 243 \right\}$.

d) Man bilde die Mengen $A \setminus C,\ B \setminus C,\ B \cup C,\ A \cap C$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} 0 &\leq x^3 - 3x^2 - x + 3 \\ &= (x+1)(x-1)(x-3) \\ &\Rightarrow \quad \text{Nullstellen} \\ &x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3 \\ &\Rightarrow \quad A = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\} \end{aligned}$$



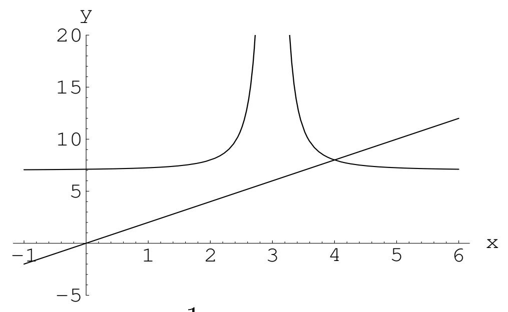
$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

b) $\dfrac{1}{(x-3)^2} + 7 = 2x \wedge x \neq 3 \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= 2\left(\left(x - \frac{7}{2}\right)(x-3)^2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= (x-4)(2x^2 - 11x + 16) \\ &\Rightarrow \quad \text{einzige reelle Nullstelle} \\ &x_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad B = \{4\} \end{aligned}$$

Die komplexen Nullstellen lauten:

$$x_{2,3} = \frac{11 \pm i\sqrt{7}}{4}$$



$f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2} + 7 = 2x = g(x)$

c) $3^{-3} = \dfrac{1}{27} \leq 3^x < 243 = 3^5 \quad \Rightarrow \quad C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

d) $A \backslash C = \{5, 6, 7, \dots\}, \quad B \backslash C = \emptyset, \quad B \cup C = C, \quad A \cap C = \{1, 3, 4\}$.

Aufgabe 7:

Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

b) $\displaystyle\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$,

c) $a_n := (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ ist durch 9 teilbar.

Lösung:

a) Beweis über vollständige Induktion:

$$\begin{aligned}
n=1: \quad \sum_{j=1}^{1} j^2 &= 1^2 = \frac{(1+1)(2+1)}{6} \\
n \to n+1: \quad \sum_{j=1}^{n+1} j^2 &= \left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+3)+2(2n+3))}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$

b) Beweis über vollständige Induktion:

$$n=1: \quad \frac{1}{2} \le \frac{1}{\sqrt{3\cdot 1+1}}$$

$$\begin{aligned}
n \to n+1: \quad & \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \\
\le\ & \frac{\sqrt{3n+4}}{\sqrt{3n+4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{3n+4}}\cdot\frac{\sqrt{(3n+4)(2n+1)^2}}{\sqrt{(3n+1)(2n+2)^2}} \\
=\ & \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}\cdot\frac{\sqrt{12n^3+28n^2+19n+4}}{\sqrt{12n^3+28n^2+20n+4}} \\
<\ & \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}
\end{aligned}$$

c) Beweis über vollständige Induktion:

$$\begin{aligned}
n=1: \quad a_1 &= 0^3 + 1^3 + 2^3 = 9 \\
n \to n+1: \quad a_{n+1} &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = a_n - (n-1)^3 + (n+2)^3 \\
&= a_n - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 \\
&= a_n + 9(n^2+n+1)
\end{aligned}$$

ist durch 9 teilbar, da a_n durch 9 teilbar ist

Aufgabe 8:

a) Für die Binomialkoeffizienten mit $n, m \in \mathbb{N}$ weise man folgende Beziehungen nach:
$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}\,.$$

b) Man bestimme für die Zahlen 119301 und 43010 die Primfaktorzerlegung, den ggT und das kgV.

c) Man wandle die rationale Zahl r mit der periodischen Zifferndarstelllung $r = 2.\overline{18}$ um in einen Bruch.

d) Man beweise indirekt, dass $\log_2 6$ irrational ist.

Lösung:

a) $$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \binom{n}{n-m}$$

b) Primfaktorzerlegung

$119301 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23, \quad 43010 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23$

$\text{ggT}\,(119301, 43010) = 23\,,$

$\text{kgV}\,(119301, 43010) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 = 223092870\,.$

c) $100r - r = 218.\overline{18} - 2.\overline{18} = 216 \;\Rightarrow\; r = \dfrac{216}{99} = \dfrac{24}{11}$

d) Behauptung: $\quad B\colon \log_2 6$ ist irrational.

$\neg B :\quad \log_2 6$ ist rational

$\Rightarrow \quad \exists\, m > n \in \mathbb{N}$ (man beachte : $\log_2 6 > 2$) mit: $\quad \log_2 6 = \frac{m}{n}$

$\Rightarrow \quad 2 \cdot 3 = 6 = 2^{\frac{m}{n}}$ (potenzieren beider Seiten mit n)

$\Rightarrow \quad 2^n \cdot 3^n = 2^m$

$\Rightarrow \quad 3^n = 2^{m-n}$ Widerspruch: 3^n ist ungerade und 2^{m-n} ist gerade .

Alternative:

Voraussetzung: A: Satz über die Primfaktorzerlegung

Behauptung: $\quad B\colon \log_2 6$ ist irrational.

$A \wedge \neg B :$ Es gilt die Primfaktorzerlegung und $\log_2 6$ ist rational

$\Rightarrow \quad \exists m, n \in \mathbb{N}$ (man beachte: $\log_2 6 > 0$): $\quad \log_2 6 = \frac{m}{n}$

$\Rightarrow \quad 2 \cdot 3 = 6 = 2^{\frac{m}{n}}$ (potenzieren beider Seiten mit n)

$\Rightarrow \quad 2^n \cdot 3^n = 2^m$ Widerspruch zu A

Fragen zur Vorlesung:

a) Beschreiben Sie zunächst anschaulich, welche Eigenschaft einer Funktion die Bijektivität beschreibt.

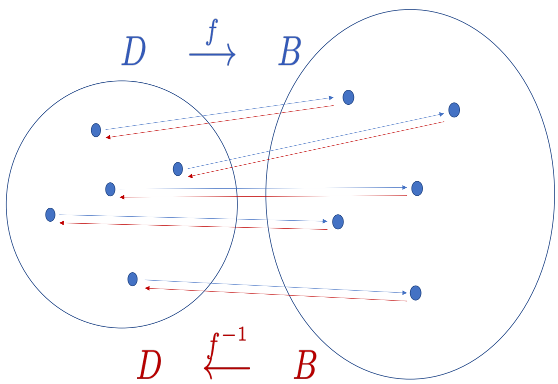
b) Veranschaulichen Sie dies graphisch.

c) Geben Sie die Definition für eine bijektive Funktion an. Seien Sie dabei ausführlich.

d) Konstruieren Sie nun je ein Beispiel einer bijektiven als auch einer nicht bijektiven Funktion.

Lösung:

a) Eineindeutigkeit: Eine Funktion bildet von einer Menge D (ihr Definitionsbereich) in eine Menge B (ihr Bildbereich) ab. Wenn sie bijektiv ist, dann wird jedem Element in D genau ein Element in B zugeordnet. Umgekehrt gibt es zu jedem Element in B genau ein Element in D. Anschaulich kann man sagen, dass beide Mengen D und B "gleich groß" sind, wobei das bei unendlichen Mengen (wie den reellen Zahlen) natürlich kein richtiger Fachbegriff ist.



b)

c) Eine Funktion $f : D \to B,\ x \mapsto f(x) = y$ heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Sie heißt injektiv, wenn für $x_1, x_2 \in D \subset \mathbb{R}$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt: $f(x_1) \neq f(x_2)$. Sie heißt surjektiv, wenn es zu jedem Element $y \in B \subset \mathbb{R}$ der Bildbereich der Funktion, ein $x \in D$ gibt, mit $f(x) = y$.

d) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit $x \mapsto f(x) = e^x$ ist bijektiv. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ mit $x \mapsto g(x) = \cos(x)$ ist nicht bijektiv, denn für $x_1 = x$ und $x_2 = x + 2\pi$ gilt: $g(x_1) = g(x_2)$, d.h. sie ist nicht injektiv und damit nicht bijektiv. Hingegen ist g surjektiv, denn zu jedem Element $y \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ gibt es (mindestens) ein $x = \arccos(y)$, so dass $\cos(x) = y$.

Abgabetermin: 16.11. - 20.11.20 (zu Beginn der Übung)