Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe ©

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 4

Aufgabe 13:

a) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} D_1 &= \,]7, 10[\ , \\ D_2 &= [-4, 4] \cup \left\{ \frac{9n}{1-2n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} , \\ D_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le y \le 1 - x^2 \right\} . \end{aligned}$$

Für jede Menge gebe man die Menge ihrer Häufungspunkte D' bzw. inneren Punkte D^0 an und kläre, ob die Menge abgeschlossen oder offen ist.

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \ln|x| - e^x$,

(ii) $\lim\limits_{x \to -1+} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x+1}}$,

(iii) $\lim\limits_{x \to \infty} 2x - \sqrt{4x^2 + 28x}$.

Lösung:

a) Die Menge der Häufungspunkte wird mit D' und die der inneren Punkte mit D^0 bezeichnet.

$D_1' = [7, 10]\,, \quad D_1^0 =]7, 10[\,, \quad D_1$ ist offen

$D_2' = [-4, 4] \cup \left\{-\frac{9}{2}\right\}\,, \quad D_2^0 =]-4, 4[\,,$

D_2 ist weder offen noch abgeschlossen

$$D_3' = D_3\,, \quad D_3^0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < y < 1 - x^2 \right\}$$

D_3 ist abgeschlossen .

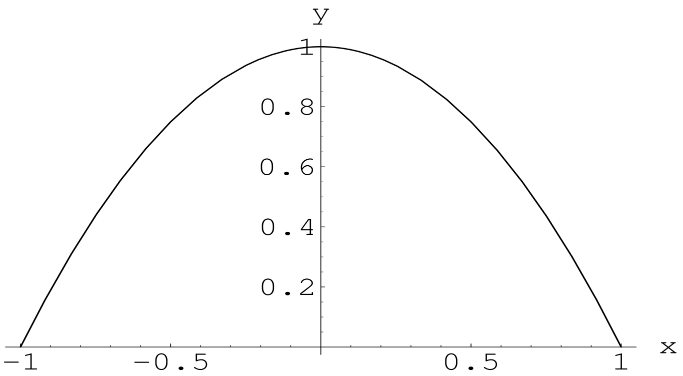


Bild 13 a) Menge D_3

b) (i) Der folgende Grenzwert existiert nur uneigentlich:

$$\lim_{x \to 0} \ln|x| - e^x = -\infty - 1 = -\infty$$

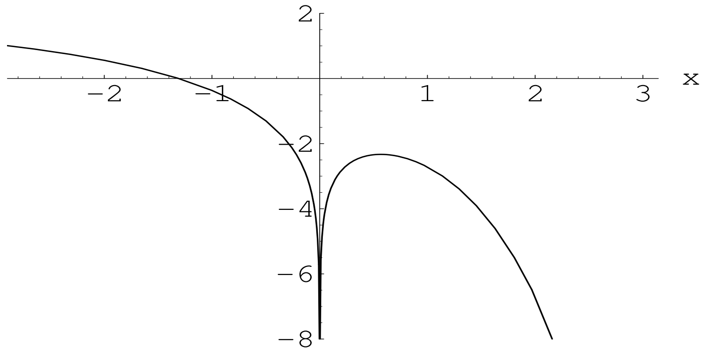


Bild 13 b) (i) $f(x) = \ln|x| - e^x$

(ii) $\lim\limits_{x\to -1+} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to -1+} \dfrac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to -1+} (x-1)\sqrt{x+1} = 0$

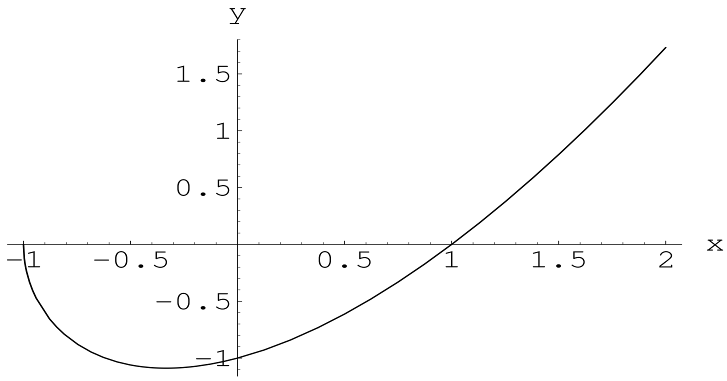


Bild 13 b) (ii) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}$

(iii)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} 2x - \sqrt{4x^2+28x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(2x-\sqrt{4x^2+28x})(2x+\sqrt{4x^2+28x})}{2x+\sqrt{4x^2+28x}}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-(4x^2+28x)}{2x+\sqrt{4x^2+28x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x}\cdot\frac{-28}{2+\sqrt{4+28/x}} = -7\end{aligned}$$

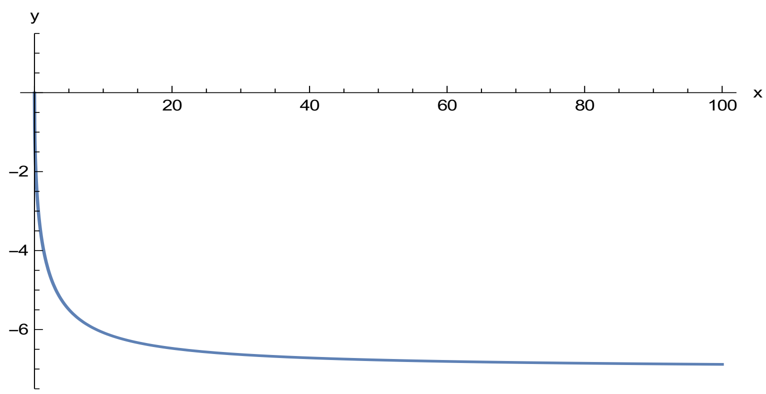


Bild 13 b) (iii) $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2+28x}$

Aufgabe 14:

a) Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

$$a_n = \left(\frac{n^3+2n+7}{2n^3+3n^2+8}\right)^4 , \qquad b_n = \sqrt{9n^2+252n} - \sqrt{9n^2-8}\,,$$

$$c_n = \frac{n^2}{n+3} - \frac{n^3}{n^2+2}\,, \qquad d_n = \frac{8\cdot 5^{n+2}+4\cdot 7^{n+1}}{2\cdot 7^{n-1}-3\cdot 5^n}\,.$$

b) Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

$$e_1 = 1\,, \quad e_{n+1} = \frac{5-3e_n}{4}\,, \qquad f_1 = 2\,, \quad f_{n+1} = \frac{13}{6-f_n}\,,$$

$$g_1 = 2\,, \quad g_{n+1} = \sqrt{6+g_n}\,.$$

Lösung:

a) (i) $a_n = \left(\frac{n^3+2n+7}{2n^3+3n^2+8}\right)^4 = \left(\frac{1+2/n^2+7/n^3}{2+3/n+8/n^3}\right)^4 \xrightarrow{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

(ii)
$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{9n^2+252n} - \sqrt{9n^2-8} \\ &= \frac{9n^2+252n-(9n^2-8)}{\sqrt{9n^2+252n}+\sqrt{9n^2-8}} = \frac{n}{n}\cdot\frac{252+8/n}{\sqrt{9+252/n}+\sqrt{9-8/n^2}} \\ &= \frac{252+8/n}{\sqrt{9+252/n}+\sqrt{9-8/n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{252}{3+3} = 42 \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{n^2}{n+3} - \frac{n^3}{n^2+2} = \frac{n^2(n^2+2)-n^3(n+3)}{(n+3)(n^2+2)} = \frac{2n^2-3n^3}{n^3+3n^2+2n+6} \\ &= \frac{2/n-3}{1+3/n+2/n^2+6/n^3} \xrightarrow{n\to\infty} -3 \end{aligned}$$

(iv) $d_n = \frac{8\cdot 5^{n+2}+4\cdot 7^{n+1}}{2\cdot 7^{n-1}-3\cdot 5^n} = \frac{7^{n-1}}{7^{n-1}}\cdot\frac{1000\cdot(5/7)^{n-1}+4\cdot 49}{2-15\cdot(5/7)^{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 98$

b) (i) Die ersten Folgenglieder lauten

$$e_1 = 1\,, \quad e_2 = \frac{1}{2}\,, \quad e_3 = \frac{7}{8} = 0.875\,,$$

$$e_4 = \frac{19}{32} = 0.593...\,, \quad e_5 = \frac{103}{128} = 0.804...\,, \quad e_6 = \frac{331}{512} = 0.646...$$

Falls $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so sei $e := \lim\limits_{n\to\infty} e_n$ der Grenzwert.
Aus der Rekursion erhält man:
$e = \dfrac{5-3e}{4} \;\Rightarrow\; 4e = 5-3e \;\Rightarrow\; e = \dfrac{5}{7} = 0.714...$
$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (gegen $e = \dfrac{5}{7}$), denn es gilt

$$\left|e_{n+1} - \frac{5}{7}\right| = \left|\frac{5-3e_n}{4} - \frac{5}{7}\right| = \left|-\frac{3}{4}e_n + \frac{15}{28}\right|$$
$$= \frac{3}{4}\left|e_n - \frac{5}{7}\right| = \cdots = \left(\frac{3}{4}\right)^n \left|e_1 - \frac{5}{7}\right| = \frac{2}{7}\left(\frac{3}{4}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

(ii) Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f konvergiert, so gilt $f = \dfrac{13}{6-f}$ mit $f \neq 6$
$\Rightarrow \quad 6f - f^2 = 13 \quad \Rightarrow \quad (f-3)^2 = -4$
Damit kann $f_n \in \mathbb{R}$ nicht konvergieren.

(iii) Wenn $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen g konvergiert, so gilt

$$g = \sqrt{6+g} \quad \Rightarrow \quad 0 = g^2 - g - 6 = (g-3)(g+2)$$

also $g = 3$, denn die Lösung $g = -2$ der letzten Gleichung hat sich beim Quadrieren eingeschlichen und löst nicht die Ausgangsgleichung.

Die ersten Folgenglieder lauten:
$g_1 = 2\ , \quad g_2 = \sqrt{6+2} = 2.82...\ , \quad g_3 = \sqrt{6+\sqrt{8}} = 2.971...\ ,$
$g_4 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{8}}} = 2.995...$

Durch vollständige Induktion zeigt man $g_n \leq 3$, denn
$n = 1: \quad g_1 = 2 \leq 3$
$n \to n+1: \quad g_{n+1} = \sqrt{6+g_n} \leq \sqrt{6+3} = 3.$

Weiter zeigt man durch vollständige Induktion $g_n \leq g_{n+1}$, denn
$n = 1: \quad g_1 = 2 \leq g_2 = \sqrt{8} = 2.82... \leq 3$
$n \to n+1: \quad g_{n+1} = \sqrt{6+g_n} \leq \sqrt{6+g_{n+1}} = g_{n+2}\,.$

Also wächst g_n monoton, ist nach oben beschränkt und damit dann konvergent gegen $g = 3$.

Aufgabe 15:

a) Für die Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

$$f_1(x) = \begin{cases} 2\cos x & , \quad x \leq 0 = x_0 \\ x^2+2 & , \quad 0 < x \end{cases} \quad , \quad f_2(x) = \frac{x^2+4x+3}{x^2-6x-7} \, , \quad x_0 = -1 \, ,$$

$$f_3(x) = \begin{cases} e-x & , \quad x \leq e = x_0 \\ \ln x & , \quad e < x \end{cases} \quad , \quad f_4(x) = \begin{cases} -2x^2+8x-5 & , \quad x \neq 2 \\ 1 & , \quad x = 2 = x_0 \end{cases}$$

zeichne man die Funktionsgraphen und berechne in x_0 links- und/oder rechtsseitige Grenzwerte und überprüfe damit, ob Stetigkeit oder stetige Ergänzbarkeit in x_0 vorliegt oder sich in x_0 eine Unstetigkeit beheben lässt.

b) Für die Funktion g mit

$$g(x) = \begin{cases} e^x & , \quad x \leq 0 \\ \sin(x+a) & , \quad 0 < x \end{cases}$$

bestimme man, falls dies möglich ist, $a \in \mathbb{R}$, so dass f in $x_0 = 0$ stetig wird.

Lösung:

a) (i)

$$\lim_{x \nearrow 0} f_1(x) = \lim_{x \nearrow 0} 2\cos x = 2\cos 0 = 2 = f_1(0)$$

$$\lim_{x \searrow 0} f_1(x) = \lim_{x \searrow 0} (x^2+2) = 0^2+2 = 2$$

f_1 ist damit stetig in $x_0 = 0$.

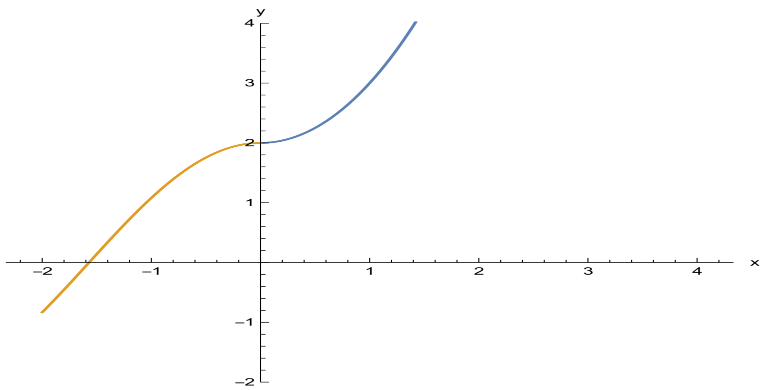


Bild 15 a) (i) $f_1(x)$

(ii) f_2 besitzt in $x_0 = -1$ eine Definitionslücke.
Durch Linearfaktorzerlegung des Zählers und Nenners erhält man

$$f_2(x) = \frac{x^2+4x+3}{x^2-6x-7} = \frac{(x+3)(x+1)}{(x-7)(x+1)}\,.$$

$$\lim_{x\to -1-} f_2(x) = \lim_{x\to -1-} \frac{(x+3)(x+1)}{(x-7)(x+1)} = \lim_{x\to -1-} \frac{x+3}{x-7} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to -1+} f_2(x) = \lim_{x\to -1+} \frac{(x+3)(x+1)}{(x-7)(x+1)} = \lim_{x\to -1+} \frac{x+3}{x-7} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$$

Mit der Wahl von $f_2(-1) = -\dfrac{1}{4}$ lässt sich f_2 in $x_0 = -1$ stetig ergänzen.

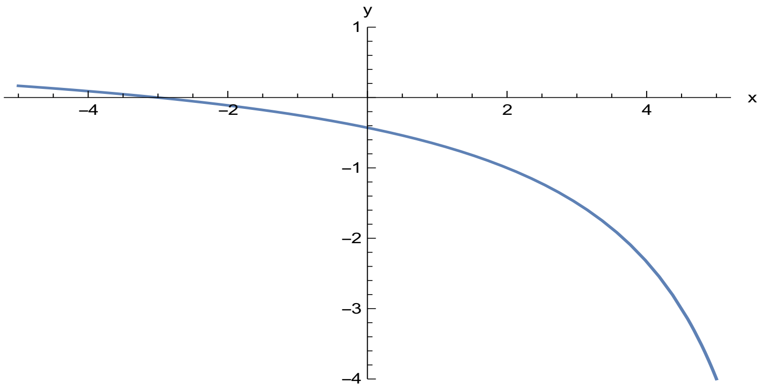


Bild 15 a) (ii) $f_2(x)$

(iii)

$$\lim_{x\nearrow e} f_3(x) = \lim_{x\nearrow e} e - x = e - e = 0 = f_3(e)$$

$$\lim_{x\searrow e} f_3(x) = \lim_{x\searrow e} \ln x = \ln e = 1 \neq f_3(e) = 0$$

f_3 besitzt in $x_0 = e$ eine Sprungstelle, ist dort also unstetig.

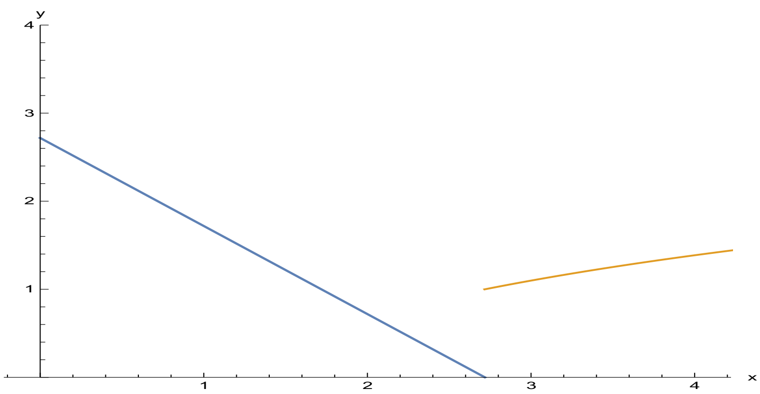


Bild 15 a) (iii) $f_3(x)$

(iv)
$$\lim_{x\nearrow 2} f_4(x) = \lim_{x\nearrow 2} -2x^2+8x-5 = \lim_{x\nearrow 2} 3-2(x-2)^2 = 3 \neq f_4(2) = 1$$
$$\lim_{x\searrow 2} f_4(x) = \lim_{x\searrow 2} -2x^2+8x-5 = 3 \neq f_4(2) = 1$$

f_4 ist unstetig in $x_0 = 2$.
Die Unstetigkeit in $x_0 = 2$ lässt sich durch Wahl von $f_4(2) = 3$ beheben.

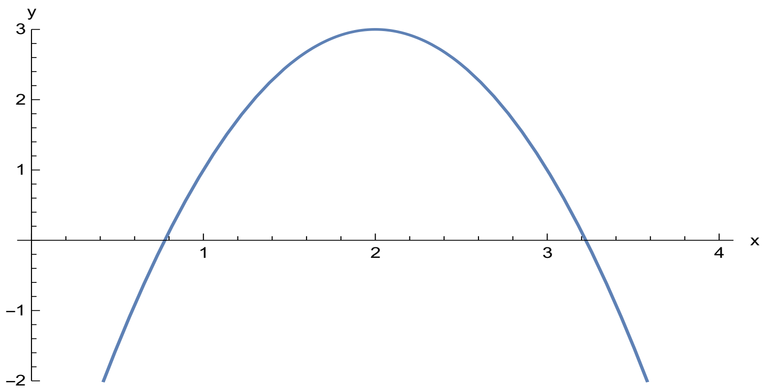


Bild 15 a) (iv) $f_4(x)$

b) Für die Stetigkeit von g in $x_0 = 0$ muss

$$\lim_{x\searrow 0} g(x) = \lim_{x\searrow 0} \sin(x+a) = \sin a \overset{!}{=} g(0) = e^0 = 1$$

gelten. Für $a = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ wird g in $x_0 = 0$ stetig .

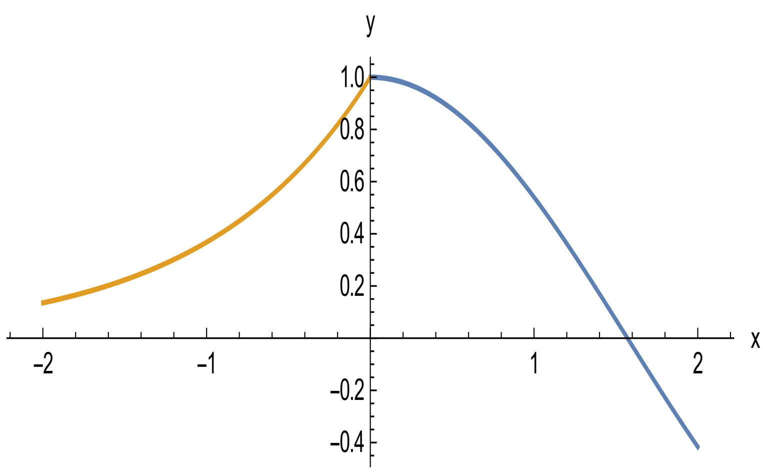


Bild 15 b) $g(x)$ mit $a = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

Aufgabe 16:

Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Abbildungsvorschrift

$$f(x) = x^4 - \frac{218}{63}x^3 - \frac{14}{3}x^2 + \frac{218}{21}x + 5$$

berechne man mit Hilfe des Intervallhalbierungsverfahrens Näherungen $\tilde{x}$ für alle Nullstellen x^* bis auf einen absoluten Fehler von $|\tilde{x} - x^*| \leq 0.001$.

Lösung:

Da f stetig ist, ergeben sich nach dem Zwischenwertsatz Nullstellen in folgenden Intervallen:

$$f(-2)\cdot f(-1) = (9.253968...)\cdot(-5.587301...) = -51.704711... < 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^* \in [-2,-1]$$

$$f(-1)\cdot f(0) = (-5.587301...)\cdot 5 = -27.936507... < 0 \quad \Rightarrow \quad x_2^* \in [-1,0]$$

$$f(1)\cdot f(2) = (8.253968...)\cdot(-4.587301...) = -37.863441... < 0 \quad \Rightarrow \quad x_3^* \in [1,2]$$

$$f(3)\cdot f(4) = (-18.285714...)\cdot(6.396825...) = -116.970521... < 0 \quad \Rightarrow \quad x_4^* \in [3,4]$$

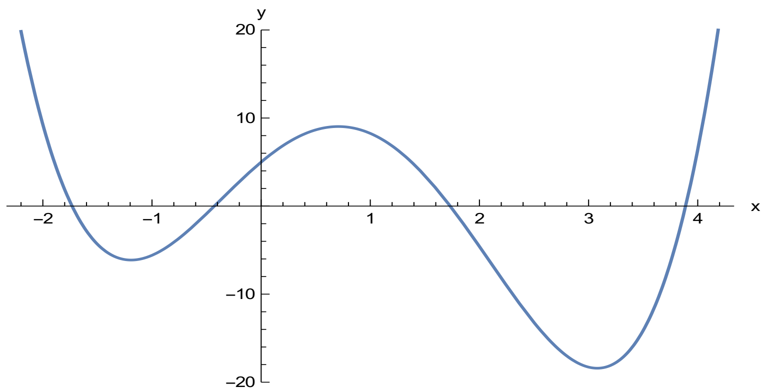


Bild 16 $\quad f(x) = x^4 - \frac{218}{63}x^3 - \frac{14}{3}x^2 + \frac{218}{21}x + 5 = (x^2-3)(x-35/9)(x+3/7)$

Nach Konstruktion lauten die Nullstellen:

$$x_1^* = -\sqrt{3} = -1.73205..., \quad x_2^* = -3/7 = -0.42857...,$$

$$x_3^* = \sqrt{3} = 1.73205..., \quad x_4^* = 35/9 = 3.88888....$$

Diese sind von der Aufgabenstellung her nicht bekannt und werden nun mit dem Intervallhalbierungsverfahren berechnet.

Ein Matlab-Programm zur Nullstellenberechnung mit Bisektion:

```
function x = bisektion(a,b,eps,funkt)
%-------------------------------------------------------------
% Berechnet eine Nullstelle mit Hilfe des Bisektionsverfahrens
%
% Input:    a<b   mit  funkt(a)<0  und  funkt(b)>0 (oder umgekehrt)
%           |b-a|<eps   Genauigkeit
%           funkt Funktion deren Nullstelle gesucht ist
%                 muss als inline Funktion definiert sein,
%                 z.B.: funkt=inline('(x^2-3)*(x-35/9)*(x+3/7)','x')
%
% Output:   x     Nullstellennäherung
%
% Kai Rothe, November-2016.
%-------------------------------------------------------------
  format long
  if(funkt(a)*funkt(b)>=0)
    [a b funkt(a) funkt(b)]
  else
    while(abs(b-a)>=eps)
      x = (a+b)/2;
      [a x b abs(b-a); funkt(a) funkt(x) funkt(b) eps]
      if(funkt(x)==0)
        break
      end
      if(funkt(a)*funkt(x)<0)
        b=x;
      else
        a=x;
      end
    end
  end
```

```
>> funkt=inline('(x^2-3)*(x-35/9)*(x+3/7)','x')
>> bisektion(-2,-1,0.001,funkt)

ans =
  -2.000000000000000  -1.500000000000000  -1.000000000000000   1.000000000000000
   9.253968253968255  -4.330357142857143  -5.587301587301588   0.001000000000000

ans =
  -2.000000000000000  -1.750000000000000  -1.500000000000000   0.500000000000000
   9.253968253968255   0.465711805555556  -4.330357142857143   0.001000000000000

ans =
  -1.750000000000000  -1.625000000000000  -1.500000000000000   0.250000000000000
   0.465711805555556  -2.370787605406746  -4.330357142857143   0.001000000000000

ans =
  -1.750000000000000  -1.687500000000000  -1.625000000000000   0.125000000000000
   0.465711805555556  -1.069495064871652  -2.370787605406746   0.001000000000000

ans =
  -1.750000000000000  -1.718750000000000  -1.687500000000000   0.062500000000000
   0.465711805555556  -0.332068564399840  -1.069495064871652   0.001000000000000

ans =
  -1.750000000000000  -1.734375000000000  -1.718750000000000   0.031250000000000
   0.465711805555556   0.059158929756710  -0.332068564399840   0.001000000000000

ans =
  -1.734375000000000  -1.726562500000000  -1.718750000000000   0.015625000000000
   0.059158929756710  -0.138355627005535  -0.332068564399840   0.001000000000000

ans =
  -1.734375000000000  -1.730468750000000  -1.726562500000000   0.007812500000000
   0.059158929756710  -0.040075405430610  -0.138355627005535   0.001000000000000

ans =
  -1.734375000000000  -1.732421875000000  -1.730468750000000   0.003906250000000
   0.059158929756710   0.009422265857759  -0.040075405430610   0.001000000000000

ans =
  -1.732421875000000  -1.731445312500000  -1.730468750000000   0.001953125000000
   0.009422265857759  -0.015356414836138  -0.040075405430610   0.001000000000000

ans = -1.731445312500000
```

```
>> funkt=inline('(x^2-3)*(x-35/9)*(x+3/7)','x')
>> bisektion(-1,0,0.001,funkt)
ans =

  -1.000000000000000  -0.500000000000000                   0   1.000000000000000
  -5.587301587301588  -0.862103174603175   4.999999999999999   0.001000000000000

ans =
  -0.500000000000000  -0.250000000000000                   0   0.500000000000000
  -0.862103174603175   2.171068948412698   4.999999999999999   0.001000000000000

ans =
  -0.500000000000000  -0.375000000000000  -0.250000000000000   0.250000000000000
  -0.862103174603175   0.653145926339285   2.171068948412698   0.001000000000000

ans =
  -0.500000000000000  -0.437500000000000  -0.375000000000000   0.125000000000000
  -0.862103174603175  -0.108491685655382   0.653145926339285   0.001000000000000

ans =

  -0.437500000000000  -0.406250000000000  -0.375000000000000   0.062500000000000
  -0.108491685655382   0.271798012748597   0.653145926339285   0.001000000000000

ans =
  -0.437500000000000  -0.421875000000000  -0.406250000000000   0.031250000000000
  -0.108491685655382   0.081462510994502   0.271798012748597   0.001000000000000

ans =
  -0.437500000000000  -0.429687500000000  -0.421875000000000   0.015625000000000
  -0.108491685655382  -0.013569625656283   0.081462510994502   0.001000000000000

ans =
  -0.429687500000000  -0.425781250000000  -0.421875000000000   0.007812500000000
  -0.013569625656283   0.033933608478585   0.081462510994502   0.001000000000000

ans =
  -0.429687500000000  -0.427734375000000  -0.425781250000000   0.003906250000000
  -0.013569625656283   0.010178667407932   0.033933608478585   0.001000000000000

ans =
  -0.429687500000000  -0.428710937500000  -0.427734375000000   0.001953125000000
  -0.013569625656283  -0.001696324576029   0.010178667407932   0.001000000000000

ans = -0.428710937500000
```

```
>> funkt=inline('(x^2-3)*(x-35/9)*(x+3/7)','x')
>> bisektion(1,2,0.001,funkt)

ans =
   1.000000000000000   1.500000000000000   2.000000000000000   1.000000000000000
   8.253968253968255   3.455357142857143  -4.587301587301587   0.001000000000000

ans =
   1.500000000000000   1.750000000000000   2.000000000000000   0.500000000000000
   3.455357142857143  -0.291232638888889  -4.587301587301587   0.001000000000000

ans =
   1.500000000000000   1.625000000000000   1.750000000000000   0.250000000000000
   3.455357142857143   1.670755053323413  -0.291232638888889   0.001000000000000

ans =
   1.625000000000000   1.687500000000000   1.750000000000000   0.125000000000000
   1.670755053323413   0.709662301199777  -0.291232638888889   0.001000000000000

ans =
   1.687500000000000   1.718750000000000   1.750000000000000   0.062500000000000
   0.709662301199777   0.213886064196390  -0.291232638888889   0.001000000000000

ans =
   1.718750000000000   1.734375000000000   1.750000000000000   0.031250000000000
   0.213886064196390  -0.037544735840389  -0.291232638888889   0.001000000000000

ans =
   1.718750000000000   1.726562500000000   1.734375000000000   0.015625000000000
   0.213886064196390   0.088457765028117  -0.037544735840389   0.001000000000000

ans =
   1.726562500000000   1.730468750000000   1.734375000000000   0.007812500000000
   0.088457765028117   0.025527672927147  -0.037544735840389   0.001000000000000

ans =
   1.730468750000000   1.732421875000000   1.734375000000000   0.003906250000000
   0.025527672927147  -0.005990819288797  -0.037544735840389   0.001000000000000

ans =
   1.730468750000000   1.731445312500000   1.732421875000000   0.001953125000000
   0.025527672927147   0.009772864551711  -0.005990819288797   0.001000000000000

ans =  1.731445312500000
```

```
>> funkt=inline('(x^2-3)*(x-35/9)*(x+3/7)','x')
>> bisektion(3,4,0.001,funkt)
ans =
   3.000000000000000   3.500000000000000   4.000000000000000   1.000000000000000
 -18.285714285714285 -14.131944444444443   6.396825396825400   0.001000000000000

ans =
   3.500000000000000   3.750000000000000   4.000000000000000   0.500000000000000
 -14.131944444444443  -6.420200892857141   6.396825396825400   0.001000000000000

ans =
   3.750000000000000   3.875000000000000   4.000000000000000   0.250000000000000
  -6.420200892857141  -0.718195839533728   6.396825396825400   0.001000000000000

ans =
   3.875000000000000   3.937500000000000   4.000000000000000   0.125000000000000
  -0.718195839533728   2.653823852539066   6.396825396825400   0.001000000000000

ans =
   3.875000000000000   3.906250000000000   3.937500000000000   0.062500000000000
  -0.718195839533728   0.922563567994136   2.653823852539066   0.001000000000000

ans =
   3.875000000000000   3.890625000000000   3.906250000000000   0.031250000000000
  -0.718195839533728   0.091010289532800   0.922563567994136   0.001000000000000

ans =
   3.875000000000000   3.882812500000000   3.890625000000000   0.015625000000000
  -0.718195839533728  -0.316368867539695   0.091010289532800   0.001000000000000

ans =
   3.882812500000000   3.886718750000000   3.890625000000000   0.007812500000000
  -0.316368867539695  -0.113375471287685   0.091010289532800   0.001000000000000

ans =
   3.886718750000000   3.888671875000000   3.890625000000000   0.003906250000000
  -0.113375471287685  -0.011356906647771   0.091010289532800   0.001000000000000

ans =
   3.888671875000000   3.889648437500000   3.890625000000000   0.001953125000000
  -0.011356906647771   0.039783078705924   0.091010289532800   0.001000000000000

ans =  3.889648437500000
```

Fragen zur Vorlesung:

Sie erinnern sich, dass eine Zahlenfolge $(a_n) \in \mathbb{R}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \epsilon$.

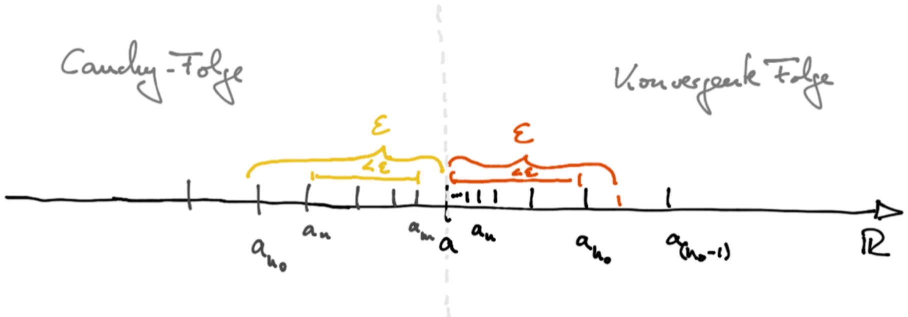
Ebenso erinnern Sie sich, dass eine reelle Zahlenfolge $(a_n) \in \mathbb{R}$ *Cauchy-Folge* heißt, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < \epsilon$.

a) Erläutern Sie den Unterschied dieser beiden Definitionen anhand einer Skizze.

b) Das *Cauchysche Konvergenzkriterium* besagt, dass eine reelle Zahlenfolge (a_n) genau dann konvergiert, wenn (a_n) eine Cauchy-Folge ist. Hätten Sie eine Idee, wie sie die Implikation (a_n) konvergiert $\Rightarrow$ (a_n) ist Cauchy-Folge beweisen könnten?

Lösung:

a)



b)
- Voraussetzung: $\forall \epsilon \; \exists n_0 : |a_n - a| < \epsilon, \; n \geq n_0$.
- Zu zeigen: $\forall \epsilon \; \exists n_0 : |a_n - a_m| < \epsilon, \; n, m \geq n_0$.
- Idee: Wähle n_0 , so dass $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \wedge |a - a_m| < \frac{\epsilon}{2}, \; n, m \geq n_0$.
- Dreiecksungleichung: $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Abgabetermin: 14.12. - 18.12.20 (zu Beginn der Übung)