Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe ©

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 5

Aufgabe 17:

a) Man bestimme eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $f(2) = 5$ und

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -\infty < x < -1\,, \\ -1 & \text{für} \quad -1 < x < 1\,, \\ 2x & \text{für} \quad 1 < x < \infty \end{cases}$$

und zeichne die Funktion. Ist f auch differenzierbar?

b) Für die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin x\,, & x < \pi \\ ax + b\,, & \pi \le x \end{cases}$$

bestimme man $a, b \in \mathbb{R}$, sodass f in $x_0 = \pi$ stetig differenzierbar wird und zeichne f.

c) Man berechne die Tangentengleichung zu $f(x) = \ln x$ im Punkt $x_0 = 1$ und fertige eine Zeichnung an.

Lösung:

a)

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -\infty < x < -1\,, \\ -1 & \text{für} \quad -1 < x < 1\,, \\ 2x & \text{für} \quad 1 < x < \infty \end{cases} \quad \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + a & \text{für} \quad -\infty < x < -1\,, \\ -x + b & \text{für} \quad -1 < x < 1\,, \\ x^2 + c & \text{für} \quad 1 < x < \infty \end{cases}$$

mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Aus $5 = f(2) = 2^2 + c \;\Rightarrow\; c = 1$.

Die Stetigkeitsforderung im Punkt $x = 1$ ergibt:

$$-1 + b = \lim_{x \to 1-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \to 1+} f(x) = 1^2 + c = 2 \Rightarrow b = 3\,.$$

Die Stetigkeitsforderung im Punkt $x = -1$ ergibt:

$$-1 + a = \lim_{x \to -1-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \to -1+} f(x) = -(-1) + b = 4 \Rightarrow a = 5\,.$$

Die nun stetige Funktion f ist in den Anschlusspunkten $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ nicht differenzierbar, denn es gilt

$$\lim_{x \to -1-} f'(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \to -1+} f'(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 1-} f'(x) = -1 \neq 2 = \lim_{x \to 1+} f'(x)\,.$$

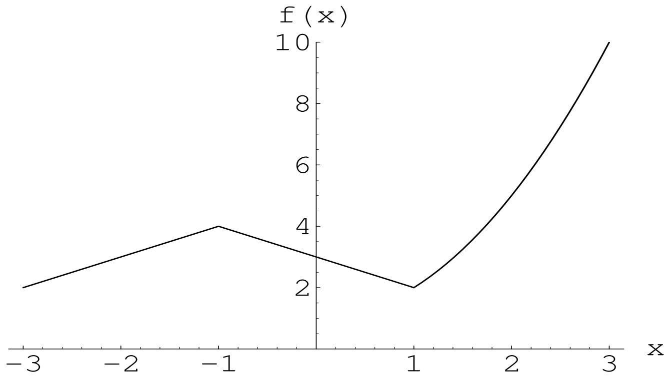


Bild 17 a) stetige Funktion $f(x)$ mit $a = 5,\ b = 3,\ c = 1$

b) Stetigkeitsforderung im Punkt $x_0 = \pi$

$$0 = \lim_{x \to \pi-} \sin x = \lim_{x \to \pi-} f(x) \stackrel{!}{=} f(\pi) = a\pi + b \Rightarrow b = -a\pi,$$

Differenzierbarkeitsforderung im Punkt $x_0 = \pi$

$$-1 = \lim_{x \to \pi-} \cos x = \lim_{x \to \pi-} f'(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \to \pi+} f'(x) = a \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = \pi\,.$$

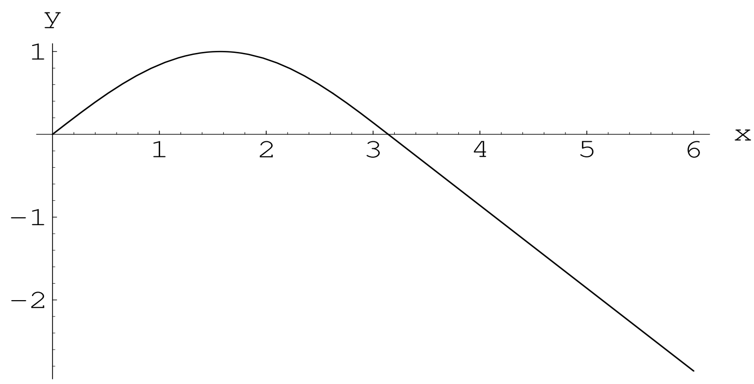


Bild 17 b) $f(x)$ mit $a = -1$ und $b = \pi$

c) $f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad T(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = x - 1$

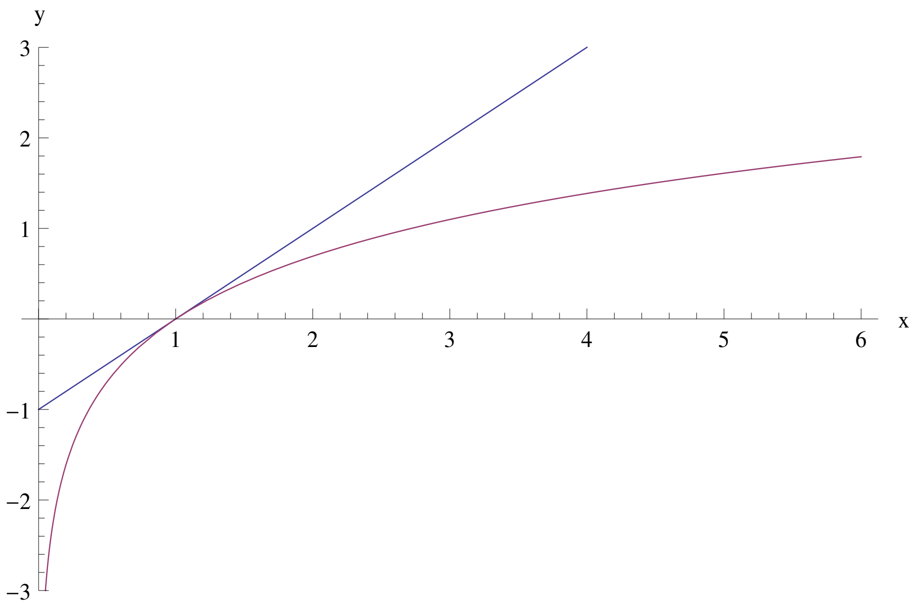


Bild 17 c) $f(x) = \ln x$ mit Tangente $T(x) = x - 1$ in $x_0 = 1$

Aufgabe 18:

a) Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

$$\text{i) } f(x) = x - \sinh x \cosh x\,, \qquad \text{ii) } g(x) = (5x^2)^x\,.$$

b) Man berechne die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } h(x) = \frac{x^2}{x^4+1}\,, \qquad \text{ii) } k(x) = \ln(\cos x)\,.$$

c) Man berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } u(x) = 7(x-1)(x^2+x+1)\,, \qquad \text{ii) } v(x) = \sqrt{2-3x}\,.$$

Lösung:

a) (i) $f'(x) = (x - \sinh x \cosh x)' = 1 - \cosh^2 x - \sinh^2 x \;=\; -2\sinh^2 x$

(ii) Logarithmisches Differenzieren von $g(x) = (5x^2)^x$ ergibt

$$\begin{aligned} g'(x) &= g(x)(\ln g(x))' = (5x^2)^x \left(\ln(5x^2)^x\right)' \\ &= (5x^2)^x \left(x\ln(5x^2)\right)' \;=\; (5x^2)^x \left(\ln(5x^2)+2\right). \end{aligned}$$

Alternativ ohne die Formel für das logaritmische Differenzieren:

$$\begin{aligned} g(x) &= (5x^2)^x = e^{\ln(5x^2)^x} = e^{x\ln(5x^2)} \\ g'(x) &= \left(e^{x\ln(5x^2)}\right)' = e^{x\ln(5x^2)}\left(x\ln(5x^2)\right)' = (5x^2)^x\left(\ln(5x^2)+2\right) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \text{i) } h'(x) &= \left(\frac{x^2}{x^4+1}\right)' = \frac{-2x^5+2x}{(x^4+1)^2} \\ h''(x) &= \left(\frac{-2x^5+2x}{(x^4+1)^2}\right)' = \frac{(-10x^4+2)(x^4+1)^2 - (-2x^5+2x)2(x^4+1)4x^3}{(x^4+1)^4} \\ &= \frac{-10x^8-10x^4+2x^4+2+16x^8-16x^4}{(x^4+1)^3} = \frac{6x^8-24x^4+2}{(x^4+1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } k'(x) &= (\ln(\cos x))' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x \\ k''(x) &= \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = -\frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \text{i) } u(x) &= 7(x-1)(x^2+x+1) \;=\; 7(x^3-1)\,, \quad u'(x) = (7(x^3-1))' \;=\; 21x^2 \\ u''(x) &= (21x^2)' \;=\; 42x\,, \quad u'''(x) = 42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } v'(x) &= \left(\sqrt{2-3x}\right)' = \left((2-3x)^{1/2}\right)' = -\frac{3}{2}(2-3x)^{-1/2} \\ v''(x) &= -\frac{9}{4}(2-3x)^{-3/2}\,, \quad v'''(x) = -\frac{81}{8}(2-3x)^{-5/2} \end{aligned}$$

Aufgabe 19:

a) Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + e^x - 5\,. \end{aligned}$$

(i) Man zeige mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion f mindestens zwei Nullstellen besitzt.

(ii) Man zeige mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass f höchstens zwei und damit dann genau zwei Nullstellen besitzt.

(iii) Man berechne die beiden Nullstellen x^* mit Hilfe des Bisektionsverfahrens aus Aufgabe 16 bis auf einen absoluten Fehler von $|\tilde{x} - x^*| \leq 10^{-10}$.

b) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für} \quad x < \pi/2\,, \\ (x - \pi/2)^2 + 1 & \text{für} \quad \pi/2 \leq x\,. \end{cases}$$

(i) Man berechne $f'(x)$ und $f''(x)$.

(ii) Ist der Mittelwertsatz

$$g'(x_0) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \quad \text{mit} \quad x_0 \in]a, b[$$

für $a = 0$ und $b = \pi$ auf $f(x)$ und $f'(x)$ anwendbar?
Man bestimme gegebenenfalls die Zwischenstelle(n) x_0.

Lösung:

a) (i) Durch Einsetzen einiger Funktionswerte erhält man:

$$f(-3) = 4.0497...\,, \quad f(0) = -4\,, \quad f(2) = 6.3890...$$

Da f stetig ist, besitzt f nach dem Zwischenwertsatz in jedem der beiden Intervalle $]-3, 0[\,,\ ]0, 2[$ mindestens eine Nullstelle.

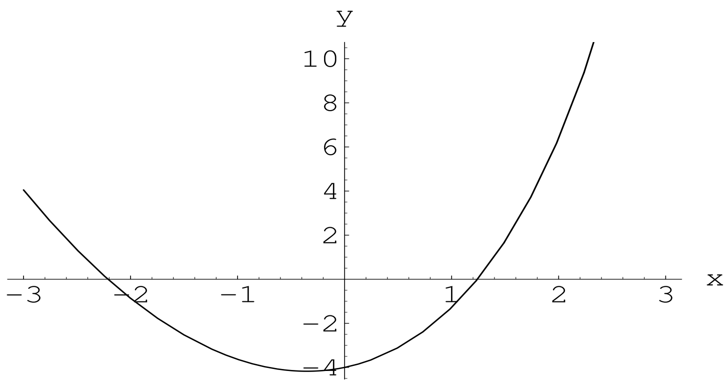


Bild 19 a) $f(x) = x^2 + e^x - 5$

(ii) f ist beliebig oft differenzierbar.

Angenommen f besäße drei oder mehr Nullstellen, dann hätte nach dem Satz von Rolle $f'(x) = 2x + e^x$ zwei oder mehr Nullstellen und $f''(x) = 2 + e^x$ mindestens eine Nullstelle. Dies ist jedoch falsch.

Demnach besitzt f höchstens zwei Nullstellen.

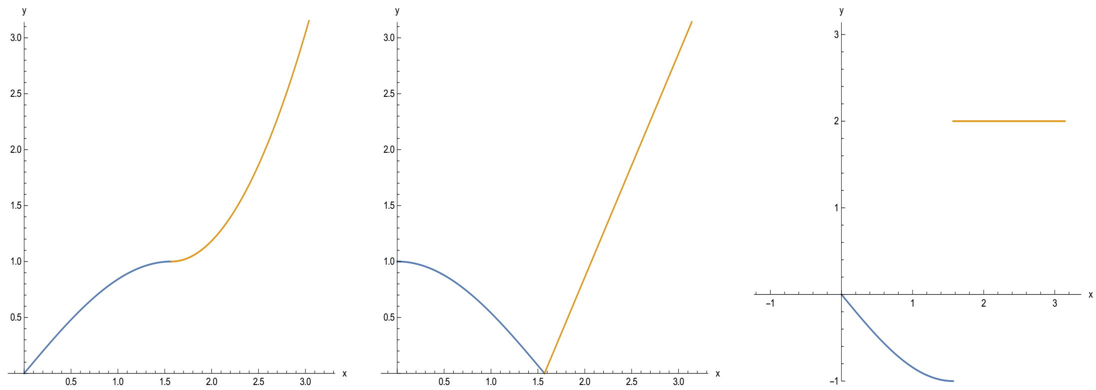
(iii)

```
>> funkt=inline('x^2+exp(x)-5','x')

>> bisektion(-3.0,0.0,10^(-10),funkt)
   ans = -2.211437758844113

>> bisektion(0.0,2.0,10^(-10),funkt)
   ans =  1.241142758342903
```

b) (i)



$$f(x) = \begin{cases} \sin x\,, & x < \frac{\pi}{2}\,, \\ \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + 1\,, & \frac{\pi}{2} \le x \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} \cos x & x < \frac{\pi}{2}\,, \\ 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \frac{\pi}{2} \le x \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{für} \quad x < \frac{\pi}{2}\,, \\ 2 & \text{für} \quad \frac{\pi}{2} < x \end{cases}$$

Bild 19 b)

(ii) Da f stetig und differenzierbar in $\mathbb{R}$ ist, sind die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt.

Es kann hier nur eine Zwischenstelle $x_0 \in]0, \pi[$ berechnet werden:

$$f'(x_0) = \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi - 0} = \frac{(\pi/2)^2 + 1 - 0}{\pi} = \frac{\pi^2 + 4}{4\pi} = 1.10371$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(x_0 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2 + 4}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{5\pi^2 + 4}{8\pi} = 2.12265 \in]0, \pi[\,.$$

Die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes für f' sind nicht erfüllt, da f'' für $x = \frac{\pi}{2}$ nicht definiert ist und diese Definitionslücke im zu untersuchenden Intervall $]0, \pi[$ liegt.

Tatsächlich lässt sich auch kein x_0 angeben, für das

$$f''(x_0) = \frac{f'(\pi) - f'(0)}{\pi - 0} = \frac{\pi - 1}{\pi} = 0.68169$$

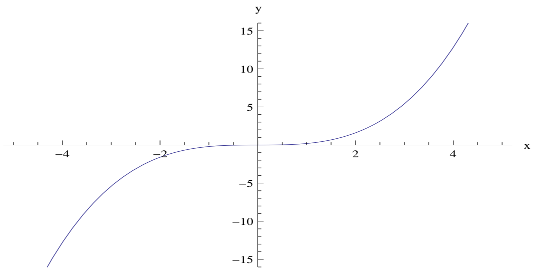
gilt.

Aufgabe 20:

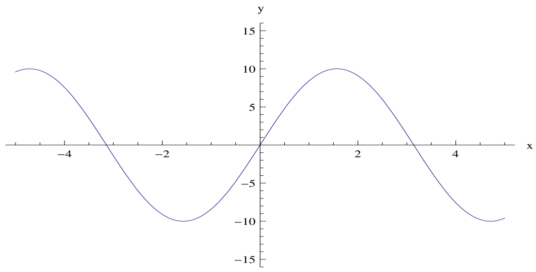
a) Man berechne die folgenden Grenzwerte

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{(x^2)}-1}{1-\cos x}\,,\quad \text{(ii)}\ \lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)\,.$$

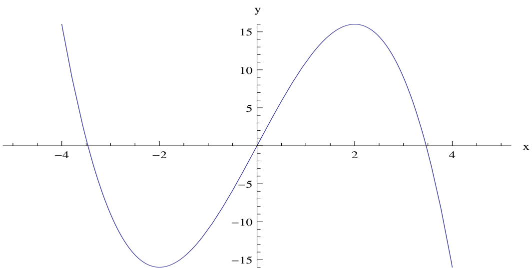
b) Nur die Ableitung $g'(x)=3x^2-9$ ist von der reellwertigen Funktion g bekannt. Man gebe die Monotoniebereiche von g an und klassifiziere alle Extremwerte. Anschließend begründe man, welcher der unten angegebenen Funktionsgraphen g_i mit dem von g übereinstimmt.



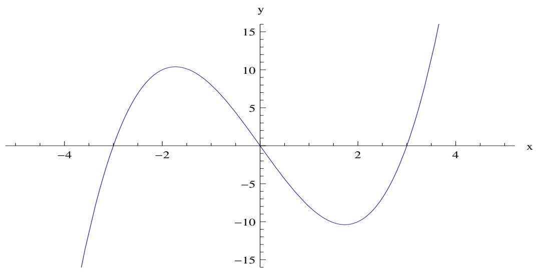
Funktion g_1



Funktion g_2



Funktion g_3



Funktion g_4

Lösung:

a) Mit Hilfe der Regel von l'Hospital ergibt sich

(i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{(x^2)}-1}{1-\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{(x^2)}}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{(x^2)}+4x^2e^{(x^2)}}{\cos x}=2\,.$$

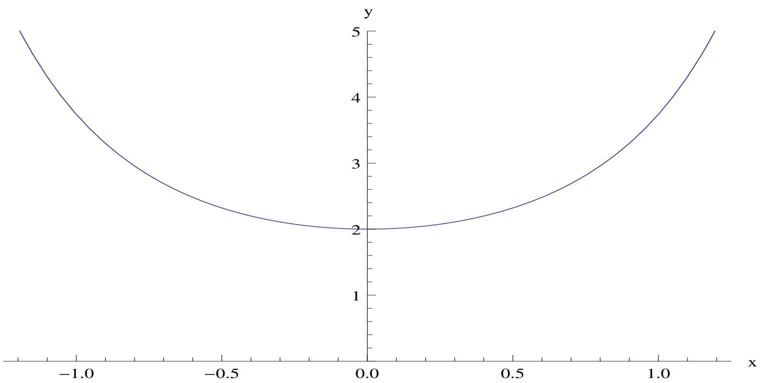


Bild 20 a) (i) $\quad f(x)=\dfrac{e^{(x^2)}-1}{1-\cos x}$

(ii)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)}{1/x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x-1}{2x+3}\cdot\frac{2(2x-1)-2(2x+3)}{(2x-1)^2}}{-1/x^2}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{8x^2}{(2x+3)(2x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{8x^2}{4x^2+4x-3} = 2\,.\end{aligned}$$

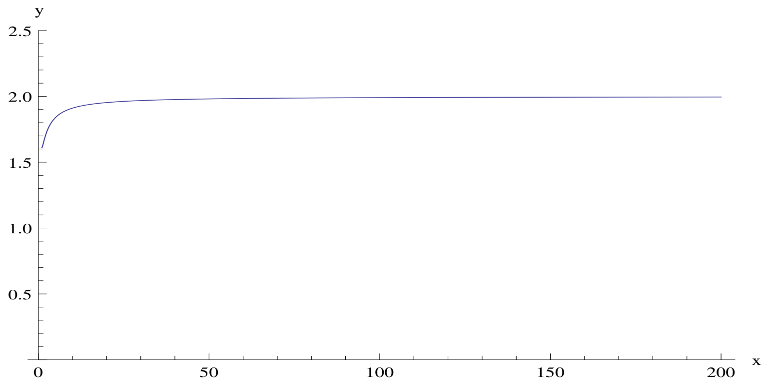


Bild 20 a) (ii) $\quad f(x) = x\ln\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)$

b) Die Nullstellen von $g'(x) = 3x^2 - 9$ lauten $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$. Die Monotoniebereiche von g ergeben sich aus dem Vorzeichenverhalten von g' :

$$g'(x) = 3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) \begin{cases} > 0 & , \quad x \in\,]-\infty, -\sqrt{3}[& \Rightarrow\ g \text{ streng monoton wachsend}\\ = 0 & , \quad x = -\sqrt{3} & \Rightarrow\ x_1 = -\sqrt{3} \text{ streng lokales Maximum}\\ < 0 & , \quad x \in\,]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[& \Rightarrow\ g \text{ streng monoton fallend}\\ = 0 & , \quad x = \sqrt{3} & \Rightarrow\ x_2 = \sqrt{3} \text{ streng lokales Minimum}\\ > 0 & , \quad x \in\,]\sqrt{3}, \infty[& \Rightarrow\ g \text{ streng monoton wachsend}\end{cases}$$

Nur beim Funktionsgraphen von $g_4(x) = x^3 - 9x$ stimmt das Monotonieverhalten mit dem von g überein.

Die Abbildungsvorschriften zu den anderen Funktionsgraphen lauten

$g_1(x) = x^3/5$,
$g_2(x) = 10\sin x$,
$g_3(x) = 12x - x^3$.

Fragen zur Vorlesung:
In dieser Aufgabe sollen die Konvexität einer Funktion f und der folgende Satz aus der Vorlesung aufgearbeitet werden.

Satz: Die Ableitung einer von unten konvexen differenzierbaren Funktion f ist monoton steigend.

Bemerkung: Analog kann man den Satz natürlich für von unten konkave differenzierbare Funktionen formulieren, deren Ableitung monoton fallend ist.

a) Begründen Sie warum die Konvexitätsbedingung

$$f(\alpha a + (1-\alpha)b) \le \alpha f(a) + (1-\alpha) f(b), \qquad \alpha \in [0,1]$$

äquivalent ist zur Bedingung

$$f(x) \le f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \qquad x \in [a,b].$$

b) Skizzieren und interpretieren Sie die Bedingungen aus a).

c) Warum folgt für eine im Definitionsbereich $[a,b]$ konvexe und zweimal differenzierbare Funktion f für $x_0 \in [a,b]$ aus dem obigen Satz $f''(x_0) \ge 0$?

Lösung

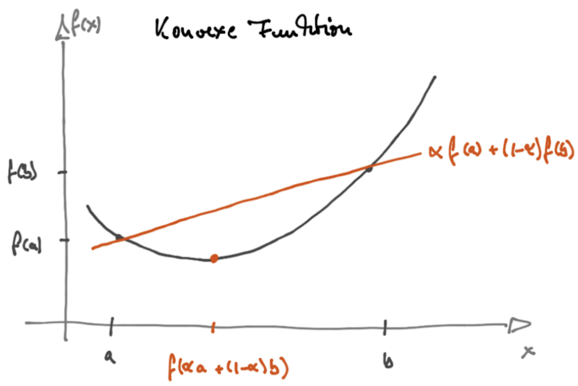
a) Die Konvexitätsbedingung $f(\alpha a+(1-\alpha)b) \le \alpha f(a)+(1-\alpha)f(b)$ mit $\alpha \in [0,1]$ ist mit $\lambda := 1-\alpha \in [0,1]$ äquivalent zu

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \le (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b).$$

Aus $x := (1-\lambda)a + \lambda b \in [a,b]$ folgt $\lambda = (x-a)/(b-a)$ und man erhält die Äquivalenz zu

$$f(x) \le \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right) f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

b) Für $x \in [a,b]$ beschreibt $S(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ die Sekante von $(a, f(a))$ nach $(b, f(b))$. Mit $\alpha \in [0,1]$ und $\alpha f(a) + (1-\alpha) f(b)$ wird diese Sekante umgekehrt durchlaufen. Für die Funktionswerte von f gilt dann $f(x) \le S(x)$.



c) Da f' im Definitionsbereich $[a, b]$ monoton wächst gilt $x_0 < x \Rightarrow f'(x_0) \leq f'(x)$ sowie $x < x_0 \Rightarrow f'(x) \leq f'(x_0)$ und man erhält

$$(0 < x - x_0 \ \Rightarrow\ 0 \leq f'(x) - f'(x_0)) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

sowie

$$(x - x_0 < 0 \ \Rightarrow\ f'(x) - f'(x_0) \leq 0) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Damit gilt

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Abgabetermin: 11.1. - 15.1.21 (zu Beginn der Übung)