Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe ©

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 6

Aufgabe 21

a) Für das Polynom $p_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 5$ berechne man das Taylor-Polynom $T_3(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 4$ unter Verwendung

(i) des Horner-Schemas und

(ii) der Ableitungsregeln für die Koeffizienten.

b) Gegeben sei die durch $f(x) = \cos(x^2 - \pi^2)$ definierte Funktion.

(i) Man berechne das Taylor-Polynom $T_2(x; x_0)$ von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$.

(ii) Man schätze den Fehler zwischen $f(3)$ und $T_2(3; \pi)$ mit Hilfe der Restgliedformel von Lagrange nach oben ab.

Lösung

a) (i) Das Taylor-Polynom $T_3(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 4$ entspricht der Umordnung des Polynoms

$$p_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 5 = c_3(x-4)^3 + c_2(x-4)^2 + c_1(x-4) + c_0 = T_3(x)$$

nach Potenzen von $x - x_0$. Die Koeffizienten $c_i,\ i = 0, 1, 2, 3$ ergeben sich aus dem Horner-Schema.

	2	3	-1	5
$+$	$\downarrow$	$\downarrow 8$	$\downarrow 44$	$\downarrow 172$
$4*$	$2 \nearrow$	$11 \nearrow$	$43 \nearrow$	$177 = c_0$
$+$	$\downarrow$	$\downarrow 8$	$\downarrow 76$	
$4*$	$2 \nearrow$	$19 \nearrow$	$119 = c_1$	
$+$	$\downarrow$	$\downarrow 8$		
$4*$	$2 \nearrow$	$27 = c_2$		
$+$	$\downarrow$			
	$2 = c_3$			

Man erhält $p_3(x) = T_3(x) = 2(x-4)^3 + 27(x-4)^2 + 119(x-4) + 177$

(ii) Mit den Ableitungen von p_3

$$p_3'(x) = 6x^2 + 6x - 1\,, \quad p_3''(x) = 12x + 6\,, \quad p_3'''(x) = 12$$

erhält man

$$\begin{aligned} p_3(x) = T_3(x) &= \frac{p_3'''(4)}{3!}(x-4)^3 + \frac{p_3''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{p_3'(4)}{1!}(x-4) + p_3(4) \\ &= \frac{12}{6}(x-4)^3 + \frac{54}{2}(x-4)^2 + \frac{119}{1}(x-4) + 177 \\ &= 2(x-4)^3 + 27(x-4)^2 + 119(x-4) + 177 \end{aligned}$$

b) (i)

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x^2 - \pi^2) && \Rightarrow \quad f(\pi) = 1 \\ f'(x) &= -2x\sin(x^2 - \pi^2) && \Rightarrow \quad f'(\pi) = 0 \\ f''(x) &= -4x^2\cos(x^2 - \pi^2) - 2\sin(x^2 - \pi^2) && \Rightarrow \quad f''(\pi) = -4\pi^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad T_2(x;\pi) = \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f'(\pi)}{1!}(x-\pi) + f(\pi) = -2\pi^2(x-\pi)^2 + 1$$

(ii) $f'''(x) = -12x\cos(x^2 - \pi^2) + 8x^3\sin(x^2 - \pi^2)$ mit $3 < \xi < \pi$ gilt

$$\begin{aligned} |f(3) - T_2(3;\pi)| &= |R_2(3;\pi)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}(3-\pi)^3\right| \\ &= |-12\xi\cos(\xi^2 - \pi^2) + 8\xi^3\sin(\xi^2 - \pi^2)|\frac{|3-\pi|^3}{6} \\ &\le (|-12\xi\cos(\xi^2 - \pi^2)| + |8\xi^3\sin(\xi^2 - \pi^2)|)\frac{|3-\pi|^3}{6} \\ &\le (12\xi + 8\xi^3)\frac{|3-\pi|^3}{6} < (12\pi + 8\pi^3)\frac{|3-\pi|^3}{6} = 0.135... \end{aligned}$$

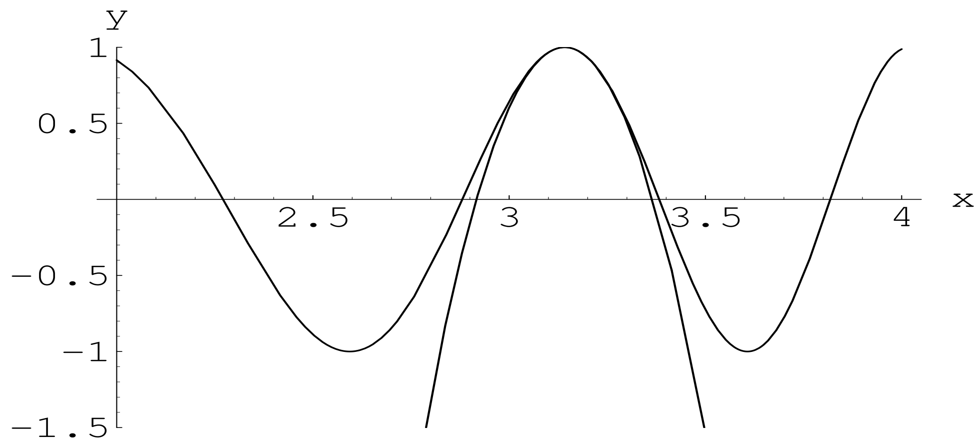


Bild 21 : $f(x) = \cos(x^2 - \pi^2)$ und $T_2(x;\pi)$

Aufgabe 22

a) Man bestimme den maximalen Definitionsbereich D, klassifiziere dort alle Extremwerte für die durch

$$f(x) = \sqrt{(x-7)(x^2-5x-14)}$$

gegebene Funktion und zeichne den Funktionsgraphen von f.

b) Man bestimme für die durch

$$g(x) = \sinh(x)\sin(x)$$

gegebene Funktion im Intervall $[-4, 4]$ alle Wendepunkte und die Bereiche in denen g konvex bzw. konkav ist und zeichne den Funktionsgraphen von g.

Lösung:

a) Der maximale Definitionsbereich für f ergibt sich aus der Forderung $0 \leq (x-7)(x^2-5x-14) = (x-7)^2(x+2)$, also $D = [-2, \infty[$.

$$f'(x) = \frac{3(x-1)(x-7)}{2\sqrt{(x-7)^2(x+2)}} \begin{cases} > 0 & , \quad -2 < x < 1 \\ = 0 & , \quad x = 1 \\ < 0 & , \quad 1 < x < 7 \\ > 0 & , \quad x > 7\,. \end{cases}$$

In ihren Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 7$ ist die Funktion f nicht differenzierbar. f' existiert also in $]-2, 7[\cup]7, \infty[$. In $x_1 = -2$ und $x_2 = 7$ liegen, wegen $f(x) \geq 0$, globale Minima vor. Im Punkt $x_3 = 1$ besitzt f ein lokales Maximum.

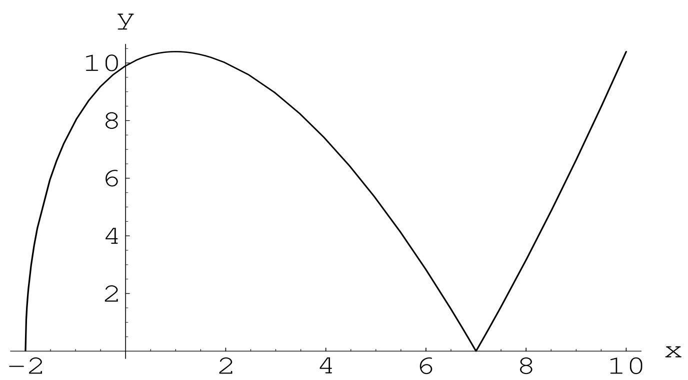


Bild 22 a) $f(x) = \sqrt{(x-7)(x^2-5x-14)}$

b) $g(x) = \sinh(x)\sin(x)$,

$g'(x) = \sinh(x)\cos(x) + \cosh(x)\sin(x)$,

$g''(x) = 2\cosh(x)\cos(x)$

$g'''(x) = 2\cos(x)\sinh(x) - 2\cosh(x)\sin(x)$

Berechnung der Wendepunktkandidaten im Intervall $[-4,4]$:

$$g''(x) = 2\cosh(x)\cos(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = -\frac{\pi}{2}$$

Hinreichende Bedingung für die Wendepunktkandidaten, d.h. es gilt $g''(x) = 0$

$$g'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0\,, \quad g'''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\cosh\left(-\frac{\pi}{2}\right) > 0$$

Damit sind x_1 und x_2 Wendepunkte.

Das Krümmungsverhalten ergibt sich aus dem Vorzeichenverhalten von $g''(x)$. Es wird also durch $\cos(x)$ festgelegt.

$$g''(x) = 2\cosh(x)\cos(x) \begin{cases} < \ 0 & ,\ -4 \le x < -\pi/2 & \text{konkav} \\ = \ 0 & ,\ x_2 = -\pi/2 & \text{Wendepunkt} \\ > \ 0 & ,\ -\pi/2 < x < \pi/2 & \text{konvex} \\ = \ 0 & ,\ x_1 = \pi/2 & \text{Wendepunkt} \\ < \ 0 & ,\ \pi/2 < x \le 4 & \text{konkav} \end{cases}$$

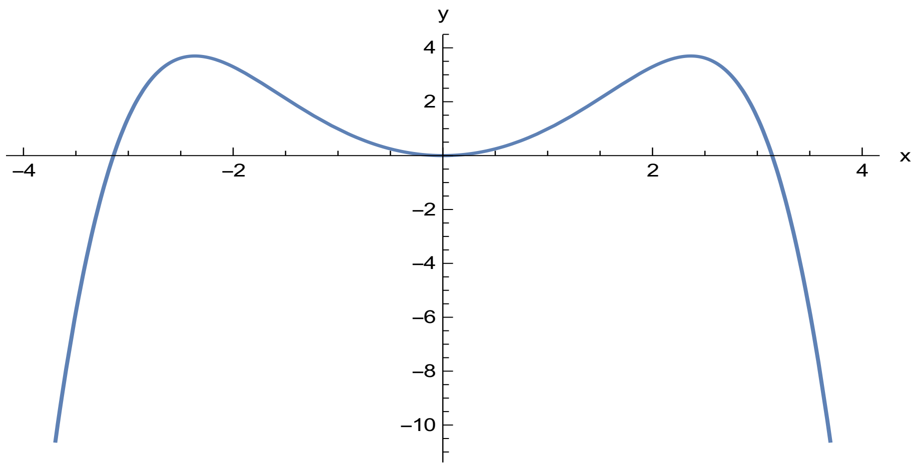


Bild 22 b) $\quad g(x) = \sinh(x)\sin(x)$

Aufgabe 23:

Gegeben sei die durch $\Phi(x) = e^x - 2$ definierte Funktion.

a) Man zeige, dass Φ genau zwei Fixpunkte besitzt.

b) Man gebe ein Intervall D an, in dem die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

für jeden Startwert $x_0 \in D$ auf Grund des Fixpunktsatzes gegen einen Fixpunkt x^* konvergiert.

Wieviele Iterationsschritte n werden nach der a priori-Abschätzung für eine Genauigkeit von $|x_n - x^*| < 10^{-4}$ höchstens benötigt?

c) Man berechne den Fixpunkt mit einem absoluten Fehler von $|x_n - x^*| < 10^{-4}$.

Lösung:

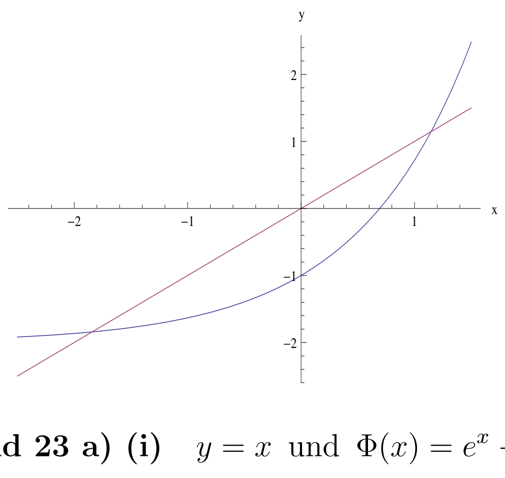
a) Das Fixpunktproblem ist äquivalent zum Nullstellenproblem für $g(x)$:

$$x = e^x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) := e^x - 2 - x = 0\,.$$

Da $g'(x) = e^x - 1$ genau eine Nullstelle besitzt, hat g nach dem Satz von Rolle höchstens zwei Nullstellen.

Es gilt $g(-2) = 0.135...$, $g(-1) = -0.632...$, $g(1) = -0.282...$, $g(2) = 3.39...$

Nach dem Zwischenwertsatz besitzt g also eine Nullstelle im Intervall $[-2, -1]$ und eine weitere im Intervall $[1, 2]$.



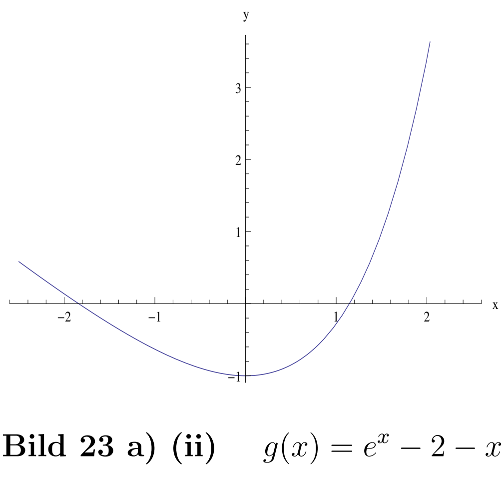


Bild 23 a) (i) $y = x$ und $\Phi(x) = e^x - 2$ **Bild 23 a) (ii)** $g(x) = e^x - 2 - x$

b) Für das Intervall $D = [-2, -1]$ werden die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes überprüft:

(i) D ist abgeschlossen.

(ii) Da $\Phi'(x) = e^x > 0$ gilt, wächst Φ monoton. Es gilt also

$$\Phi(D) = [\Phi(-2), \Phi(-1)] = [-1.865, -1.632] \subset [-2, -1] = D.$$

(iii) Φ ist stetig differenzierbar. Eine Kontraktionskonstante in D erhält man durch

$$L = \sup_{-2 \le x \le -1} |\Phi'(x)| = \sup_{-2 \le x \le -1} e^x = \frac{1}{e} = 0.367879...,$$

d.h. Φ ist kontrahierend auf D.

Damit sind die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt. Es gibt also genau einen Fixpunkt $x^* \in D$, das Fixpunktverfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in D$ gegen x^* und es gelten die a priori- und a posteriori-Fehlerabschätzung.

Die Anzahl der Iterationsschritte, die zur näherungsweisen Berechnung des Fixpunktes mit $|x_n - x^*| < 10^{-4}$ höchstens erforderlich sein wird, kann aus der a priori-Fehlerabschätzung ermittelt werden. Für den Startwert $x_0 = -1$ erhält man $n = 10$ Iterationsschritte:

$$|x_n - x^*| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| < 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \quad n > \frac{\ln\left(\frac{1-L}{10000|x_1-x_0|}\right)}{\ln L} = \frac{\ln\left(\frac{1-0.367879}{10000|-1.632+1|}\right)}{\ln 0.367880} = 9.21...$$

c) Ein Matlab-Programm zur Fixpunktberechnung mit a posteriori-Fehlerabschätzung

$$|x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|$$

als Abbruchkriterium:

```
>> funkt=inline('exp(x)-2','x')
>> fixpunkt(-1,0.0001,funkt,0.36787944117144233)
k     x_k
0     -1
1     -1.632120558828558
2     -1.804485465847412
3     -1.835440893922046
4     -1.840456855343537
5     -1.841255113911434
ans= -1.841381782812870
```

```
function x = fixpunkt(x0,eps,funkt,L)
%------------------------------------------------------------
% Berechnet einen Fixpunkt mit Hilfe des Fixpunktverfahrens
%
```

```
% Input:    x0    Startwert
%           eps   Genauigkeit
%           funkt Verfahrensfunktion
%                 muss als inline Funktion definiert sein,
%                 z.B.: funkt=inline('exp(x)-2','x')
%           L     Lipschitzkonstante,
%                 falls unbekannt L>1 setzen
%
% interne
% Variable: n     zählt die Iterationsschritte
%           x     nächste Iterierte
%
% Output:   x     Fixpunktnäherung
%
% Kai Rothe, März-2013.
%------------------------------------------------------------
  n=0;
  [n x0]
  x = funkt(x0);
  if(0<L & L<1)
    while(L*abs(x-x0)/(1-L)>eps)
      x0 = x;
      n=n+1;
      [n x0]
      x  =  funkt(x0);
    end
  else
    while(abs(x-x0)>eps)
      x0 = x;
      n=n+1
      x  =  funkt(x0)
    end
  end
```

Bemerkung:

Der Fixpunkt im Intervall $[1,2]$ kann mit der Verfahrensfunktion $\Phi(x) = e^x - 2$ nicht berechnet werden, denn es gilt

$$\min_{1\leq x\leq 2} |\Phi'(x)| = \min_{1\leq x\leq 2} e^x = e = 2.71828... > 1,$$

d.h. Φ kontrahiert nicht im Intervall $[1,2]$.

Schreibt man obiges Fixpunktproblem um in $x = \ln(x+2) =: \Theta(x)$, so sind die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes für Θ in $[1,2]$ mit $L = \dfrac{1}{3}$ erfüllt und der Fixpunkt berechnet sich zu $x^{**} = 1.1461$.

Aufgabe 24

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - x - 6$, sowie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von f mittels Startwert $x_0 \geq 3$ ergibt.

a) Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle x^* konvergiert und berechne diese.

b) Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit
$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2 .$$

c) Man berechne ausgehend vom Startwert $x_0 = 4$ eine Nullstelle x^* mit
$$|x_n - x^*| \leq 10^{-10}.$$

Lösung

Die Funktion $f(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ besitzt genau die Nullstellen $x^* = 3$ und $x^{**} = -2$.

Die durch f gegebene Newton-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lautet:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n+2)(x_n-3)}{2x_n - 1} .$$

a)

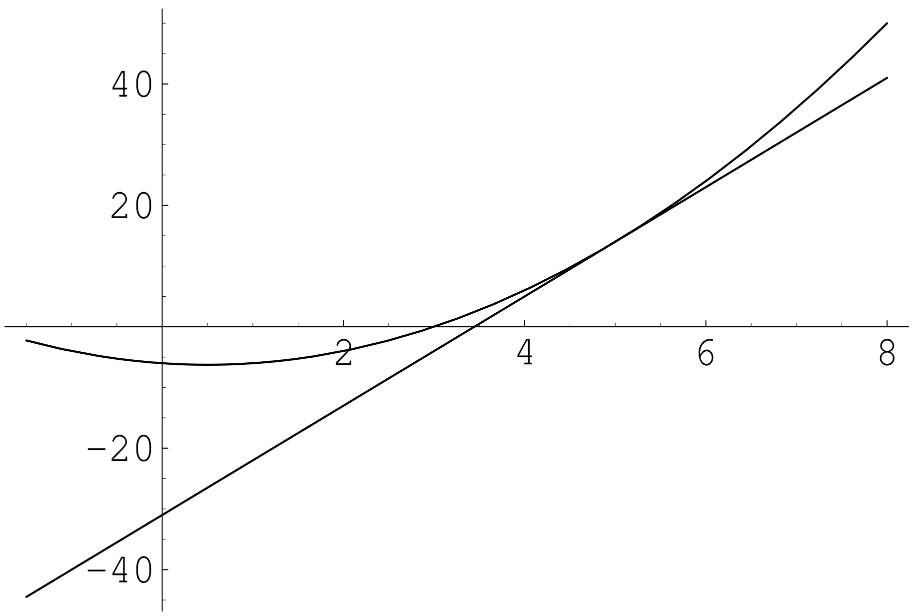


Bild 24 $f(x) = x^2 - x - 6$ mit Tangente für ein $x_0 \geq 3$

Da $x_0 \geq 3$ vorausgesetzt ist, vermuten wir aufgrund der Anschauung, dass die Newton-Folge monoton gegen die Nullstelle $x^* = 3$ fällt.

Beweis von $x_n \geq 3$ über Induktion:

$n = 0: \quad x_0 \geq 3$

$n \to n+1: \; x_{n+1} - 3 = x_n - \dfrac{(x_n+2)(x_n-3)}{2x_n - 1} - 3 = \dfrac{(x_n-3)^2}{2x_n-1} \geq 0$

Für $x_n \geq 3$ fällt die Newton-Folge monoton.

Beweis direkt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n+2)(x_n-3)}{2x_n-1} \quad \Rightarrow \quad x_n - x_{n+1} = \frac{(x_n+2)(x_n-3)}{2x_n-1} \geq 0$$

Damit konvergiert die Newton-Folge gegen $\hat{x} := \lim\limits_{n\to\infty} x_n\,.$

Wegen $x_n \geq 3$ und $\hat{x} = \hat{x} - \dfrac{f(\hat{x})}{f'(\hat{x})} \quad \Rightarrow \quad f(\hat{x}) = 0$ für $\hat{x} = x^* = 3\,.$

b) $|x_{n+1} - x^*| = |x_{n+1} - 3| = \left|\dfrac{(x_n-3)^2}{2x_n-1}\right| = \dfrac{|x_n - x^*|^2}{|2x_n-1|} \leq \dfrac{1}{5}|x_n - x^*|^2$

c) Für den Startwert $x_0 = 4$ erhält man:

$$\begin{aligned} x_0 &= 4 \\ x_1 &= 3.142857143....... \\ x_2 &= 3.00386100386..... \\ x_3 &= 3.0000029768726... \\ x_4 &= 3.00000000000177.. \end{aligned}$$

Fragen zur Vorlesung:

Betrachten Sie die Taylor-Formel für die Funktion $f(x) = \sin(x)$.

a) Nachdem Sie die Ableitungen der Funktion f hergeleitet haben als

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos(x), & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \sin(x), & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

so versichern Sie sich, dass die Darstellung $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ ebenfalls gilt.

b) Schreiben Sie jetzt das Taylor-Polynom vom Grad m zum Entwicklungspunkt x_0 auf und leiten daraus die MacLaurin-Formel für $\sin(x)$ her. Welche Restgliedform wird verwendet?

c) Schätzen Sie nun ab, wie sich das Restglied der Taylor-Formel verhält, wenn einerseits $n \to \infty$ (wobei x fest gehalten wird) und andererseits $x \to \infty$ (mit n fest). Können Sie eine Konsequenz beschreiben für die Taylor-Formel der sin-Funktion?

Lösung:

a) Da $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$, $\sin(x) = -\sin(x + \pi)$, $\sin(n\pi) = 0$ und da beide Funktionen periodisch mit der Periode 2π sind, es also gilt, dass $\sin(x) = \sin(x + 2n\pi)$ ($n \in \mathbb{N}$), da weiter die Ableitungsregeln $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$ gelten, folgt die Behauptung.

b) Die Taylor-Formel für $f(x) = \sin(x)$ kann mit dem Taylor-Polynom $T_m(x; x_0)$ geschrieben werden als

$$\sin(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{T_m(x;x_0)} + R_m(x).$$

Mit $f^{(k)}(x_0) = \sin(x_0 + k\frac{\pi}{2})$ und für $x_0 = 0$ ist $f^{(k)}(0) = \sin(k\frac{\pi}{2}) = (-1)^\nu$ für $k = 2\nu + 1$ ungerade und entsprechend $f^{(k)}(x) = 0$ für $k = 2\nu$ gerade.

Für $m = 2n + 2$ besitzt das Taylor-Polynom $n + 1$ Glieder (die bis zum Grad $2n+1$ reichen, weil ja jedes zweite Folgenglied ausgelassen wird). Die MacLaurin-Formel lautet also

$$\sin(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu + 1)!} x^{2\nu+1} + R_{2n+2}(x),$$

mit dem Restglied in Lagrange-Form

$$R_{2n+2}(x) = \frac{f^{(2n+3)}(\theta x)}{(2n + 3)!} x^{2n+3} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n + 3)!} x^{2n+3} \cos(\theta x). \tag{1}$$

c) Betrachte zwei Fälle:

(i) x **fest,** $n \to \infty$**:** Für $|x| < 1$ kann x^{2n+3} als geometrische Folge angesehen werden und die Folge $\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+3)!}$ konvergiert gegen Null. Für $x \in U_\epsilon(0)$ wird das Taylor-Polynom also beliebig gut die $\sin$-Funktion approximieren. Insbesondere kann man sagen, dass immer höhere Potenzen immer weniger zur Güte der Approximation beitragen.

(ii) n **fest,** $x \to \infty$**:** In diesem Fall ist der Term $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} =: C$ als konstant anzusehen und der Fehler in der Approximation verhält sich wie $\mathcal{O}(x^{2n+3})$. Eine gute Approximation ist also lediglich in einer Umgebung der Null zu erwarten. Allerdings ist die Konstante C für großes n sehr klein, die Umgebung in der eine praktisch brauchbare Approximation zu erwarten ist, wächst also für großes n.

Bemerkung: Dieses Verständnis werden wir in kommenden Vorlesungen für die in der Praxis sehr wichtige Fourier-Reihe gut gebrauchen können.

Abgabetermin: 25.1. - 29.1.21 (zu Beginn der Übung)