Aufgabe 1: (3 Punkte)

Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{1}{2}$.

Lösung:

Beweis über vollständige Induktion:

$$\begin{aligned} n = 0: \quad \sum_{k=0}^{0} 3^k &= 3^0 = 1 = \frac{3^1}{2} - \frac{1}{2} \\ n \to n+1: \quad \sum_{k=0}^{n+1} 3^k &= \sum_{k=0}^{n} 3^k + 3^{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{1}{2} + 3^{n+1} \\ &= 3^{n+1}\left(\frac{1}{2} + 1\right) - \frac{1}{2} = 3^{n+1} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3^{n+2}}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Man berechne die folgenden Grenzwerte

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{7 \cdot 5^{n+1} - 3^n}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$.

Lösung:

a) (2 Punkte)
Aus der Konvergenz geometrischer Folgen $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|q| < 1$ erhält man

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{7 \cdot 5^{n+1} - 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^n} \cdot \frac{1}{7 \cdot 5 - (3/5)^n} = \frac{1}{7 \cdot 5} = \frac{1}{35}.$$

b) (2 Punkte)
Aus der Regel von de l'Hospital für den Fall "$\frac{0}{0}$" erhält man

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - x^2 - 5x - 3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to-1} \frac{3x^2 + 8x + 5}{3x^2 - 2x - 5} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to-1} \frac{6x + 8}{6x - 2} = \frac{-6 + 8}{-6 - 2} = -\frac{1}{4}.$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

a) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} e^x\,, & x \leq 1 \\ (x+a)^3\,, & 1 < x\,. \end{cases}$

Man bestimme $a \in \mathbb{R}$, sodass f in $x_0 = 1$ stetig wird. Ist f in $x_0 = 1$ auch differenzierbar (Begründung)?

b) Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

$$\text{(i) } f(x) = \ln(x)\cos(x), \quad \text{(ii) } g(x) = \frac{x^2}{x^3-1}, \quad \text{(iii) } h(x) = \sqrt{\frac{1}{2x^2} + \sin(x)}.$$

Lösung:

a) (2 Punkte)

Stetigkeit im Punkt $x_0 = 1$

$$(a+1)^3 = \lim_{x\to 1+}(x+a)^3 = \lim_{x\to 1+} f(x) \overset{!}{=} f(1) = e^1 = e \;\Rightarrow\; a = \sqrt[3]{e} - 1.$$

f ist im Punkt $x_0 = 1$ nicht differenzierbar, denn

$$3e^{2/3} = \lim_{x\to 1+} 3(x + \sqrt[3]{e} - 1)^2 = \lim_{x\to 1+} f'(x) \neq \lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1-} e^x = e.$$

b) (3 Punkte)

(i) $f'(x) = (\ln(x)\cos(x))' = \dfrac{1}{x}\cos(x) - \ln(x)\sin(x)$

(ii) $g(x) = \left(\dfrac{x^2}{x^3-1}\right)' = \dfrac{2x(x^3-1) - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = \dfrac{-2x - x^4}{(x^3-1)^2}$

(iii) $h'(x) = \left(\sqrt{\dfrac{1}{2x^2} + \sin(x)}\right)' = \dfrac{\cos(x) - \dfrac{1}{x^3}}{2\sqrt{\dfrac{1}{2x^2} + \sin(x)}}$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Für die durch

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

gegebene Funktion f bestimme man den maximalen Definitionsbereich D, prüfe, ob f symmetrisch ist, gebe das Monotonieverhalten von f in D an und klassifiziere alle Extremwerte.

Lösung:

Definitionsbereich: $9 - x^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; D = [-3, 3]$

Symmetrie: f ist gerade, denn $f(-x) = \sqrt{9 - (-x)^2} = \sqrt{9 - x^2} = f(x)$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad -3 < x < 0 \quad \Rightarrow f \text{ streng monoton wachsend} \\ = 0 & \text{für} \quad x_1 = 0 \\ < 0 & \text{für} \quad 0 < x < 3 \quad \Rightarrow f \text{ streng monoton fallend} \end{cases}$$

Damit sind $x_0 = -3$ und $x_2 = 3$ strenge lokale Minima und $x_1 = 0$ ist strenges lokales Maximum. Minima und Maximum sind sogar globale Extremwerte.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x - 4,$$

sowie einen Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

a) Schreiben Sie das Taylorpolynom $T_3(x)$ bis zum Grad 3 auf.

b) Berechnen Sie das Restglied $R_3(x)$ in der Form nach Lagrange.

c) Wie verhält sich das Taylorpolynom, wenn Sie es bis zum Grad 4 entwickeln und welche Form hat dann das Restglied?

Lösung:

a) (1 Punkt)

Zunächst berechne ich die Ableitungen von f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x^3 + x^2 + 1 &\Rightarrow\quad & f'(0) = 1 \\ f''(x) &= 6x^2 + 2x &\Rightarrow\quad & f''(0) = 0 \\ f'''(x) &= 12x + 2 &\Rightarrow\quad & f'''(0) = 2 \\ f^{(4)}(x) &= 12 &\Rightarrow\quad & f^{(4)}(0) = 12 \end{aligned}$$

Außerdem ist $f(0) = -4$. Damit ergibt sich

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = -4 + x + 0x^2 + \frac{2}{3!}x^3 = \frac{1}{3}x^3 + x - 4.$$

b) (1 Punkt)

Das Restglied nach Lagrange kann allgemein geschrieben werden:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$R_3(x)$ berechnet sich also zu

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4 = \frac{12}{4!}x^4 = \frac{1}{2}x^4$$

c) (2 Punkte)

Das Taylorpolynom $T_4(x)$ berechnet sich zu

$$T_4(x) = -4 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{12}{4!}x^4 = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x - 4 = f(x)$$

Für das Restglied benötigen wir $f^{(5)}(x)$. Nun ist aber $f^{(5)}(x) \equiv 0$, daher gilt

$$R_4(x) = 0.$$