Aufgabe 1: (3 Punkte)

Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 7^k = \frac{7^{n+1}}{6} - \frac{1}{6}$.

Lösung:

Beweis über vollständige Induktion:

$$n = 0: \quad \sum_{k=0}^{0} 7^k = 7^0 = 1 = \frac{7^1}{6} - \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} n \to n+1: \quad \sum_{k=0}^{n+1} 7^k &= \sum_{k=0}^{n} 7^k + 7^{n+1} = \frac{7^{n+1}}{6} - \frac{1}{6} + 7^{n+1} \\ &= 7^{n+1}\left(\frac{1}{6} + 1\right) - \frac{1}{6} = 7^{n+1} \cdot \frac{7}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7^{n+2}}{6} - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Man berechne die folgenden Grenzwerte

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 4^n}{3^n + 4^{n+1}}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$.

Lösung:

a) (2 Punkte)
Aus der Konvergenz geometrischer Folgen $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|q| < 1$ erhält man

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 4^n}{3^n + 4^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{4^n} \cdot \frac{3}{(3/4)^n + 4} = \frac{3}{4}.$$

b) (2 Punkte)
Aus der Regel von de l'Hospital für den Fall "$\frac{0}{0}$" erhält man

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2 - 5x + 3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 + 2x - 5} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{6x}{6x + 2} = \frac{6}{6+2} = \frac{3}{4}.$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

a) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} e^{x+b}\,, & x < 2 \\ x^2\,, & 2 \leq x\,. \end{cases}$

Man bestimme $b \in \mathbb{R}$, sodass f in $x_0 = 2$ stetig wird. Ist f in x_0 auch differenzierbar (Begründung)?

b) Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

$$\text{(i) } f(x) = \ln(x)\sin(x), \quad \text{(ii) } g(x) = \frac{x^3}{x^2-1}, \quad \text{(iii) } h(x) = \sqrt{\frac{2}{x} + \cos(x)}.$$

Lösung:

a) (2 Punkte)

Stetigkeit im Punkt $x_0 = 2$

$$e^{2+b} = \lim_{x \to 2-} e^{x+b} = \lim_{x \to 2-} f(x) \overset{!}{=} f\,(2) = 2^2 = 4 \;\Rightarrow\; b = \ln(4) - 2.$$

f ist im Punkt $x_0 = 2$ differenzierbar, denn

$$4 = \lim_{x \to 2-} e^{x+\ln(4)-2} = \lim_{x \to 2-} f'(x) = \lim_{x \to 2+} f'(x) = \lim_{x \to 2+} 2x = 4.$$

b) (3 Punkte)

(i) $f'(x) = (\ln(x)\sin(x))' = \dfrac{1}{x}\sin(x) + \ln(x)\cos(x)$

(ii) $g(x) = \left(\dfrac{x^3}{x^2-1}\right)' = \dfrac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$

(iii) $h'(x) = \left(\sqrt{\dfrac{2}{x} + \cos(x)}\right)' = \dfrac{-\sin(x) - \dfrac{2}{x^2}}{2\sqrt{\dfrac{2}{x} + \cos(x)}}$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Für die durch

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

gegebene Funktion f bestimme man den maximalen Definitionsbereich D, prüfe, ob f symmetrisch ist, gebe das Monotonieverhalten von f in D an und klassifiziere alle Extremwerte.

Lösung:

Definitionsbereich: $4 - x^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; D = [-2, 2]$

Symmetrie: f ist gerade, denn $f(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = f(x)$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad -2 < x < 0 \quad \Rightarrow f \text{ streng monoton wachsend} \\ = 0 & \text{für} \quad x_1 = 0 \\ < 0 & \text{für} \quad 0 < x < 2 \quad \Rightarrow f \text{ streng monoton fallend} \end{cases}$$

Damit sind $x_0 = -2$ und $x_2 = 2$ strenge lokale Minima und $x_1 = 0$ ist strenges lokales Maximum. Minima und Maximum sind sogar globale Extremwerte.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5,$$

sowie einen Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

a) Schreiben Sie das Taylorpolynom $T_3(x)$ bis zum Grad 3 auf.

b) Berechnen Sie das Restglied $R_3(x)$ in der Form nach Lagrange.

c) Wie verhält sich das Taylorpolynom, wenn Sie es bis zum Grad 4 entwickeln und welche Form hat dann das Restglied?

Lösung:

a) (1 Punkt)

Zunächst berechne ich die Ableitungen von f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + x^2 + 4x & \Rightarrow \quad & f'(0) = 0 \\ f''(x) &= 12x^2 + 4 & \Rightarrow \quad & f''(0) = 4 \\ f'''(x) &= 24x + 2 & \Rightarrow \quad & f'''(0) = 2 \\ f^{(4)}(x) &= 24 & \Rightarrow \quad & f^{(4)}(0) = 24 \end{aligned}$$

Außerdem ist $f(0) = 5$. Damit ergibt sich

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = 5 + 0x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5.$$

b) (1 Punkt)

Das Restglied nach Lagrange kann allgemein geschrieben werden:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$R_3(x)$ berechnet sich also zu

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4 = \frac{24}{4!}x^4 = x^4$$

c) (2 Punkte)

Das Taylorpolynom $T_4(x)$ berechnet sich zu

$$T_4(x) = 5 + \frac{0}{1!}x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{24}{4!}x^4 = x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5 = f(x)$$

Für das Restglied benötigen wir $f^{(5)}(x)$. Nun ist aber $f^{(5)}(x) \equiv 0$, daher gilt

$$R_4(x) = 0.$$