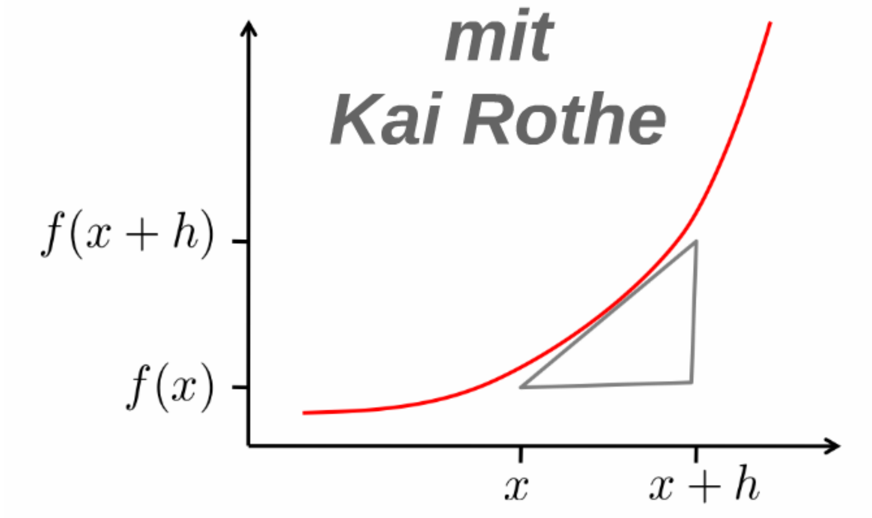
Analysis I

Winter 2020/21

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe



Einführung und Grundlagen

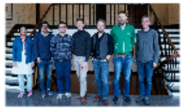
Buch Kapitel 1

Ihr Professor

Koordinaten:

Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ CliSAP
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Hintergrund

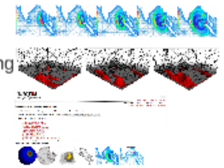


Kurz-CV

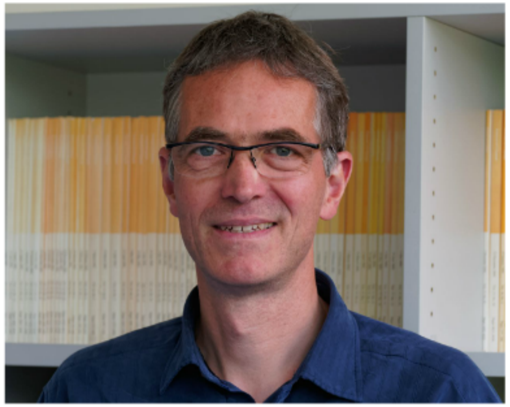
seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

Forschungsinteressen

Adaptive Tsunami Modellierung
Adaptive Atmosphären Modellierung
Gitter Erzeugung
Multi-Skalen Simulationen

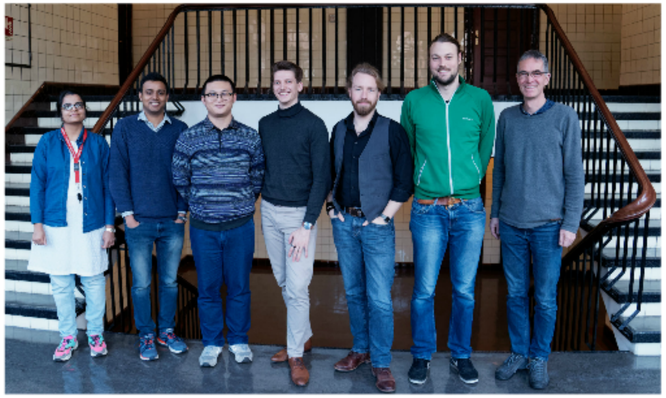


Koordinaten:



Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ CliSAP
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Hintergrund

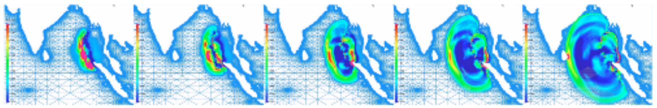


Kurz-CV

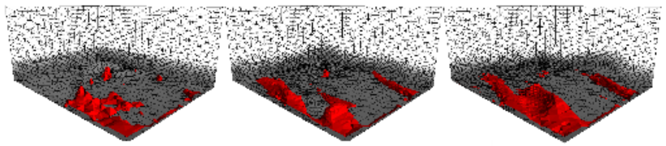
seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

Forschungsinteressen

Adaptive Tsunami Modellierung

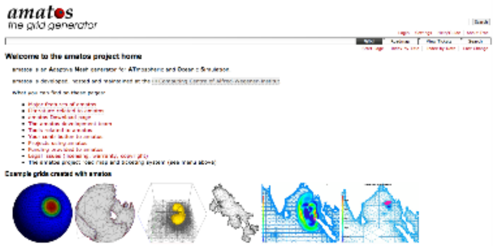


Adaptive Atmosphären Modellierung



Gitter Erzeugung

Multi-Skalen Simulationen



Infos zum Kurs

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.

R. Ansorge et al.: *Mathematik für Ingenieure I* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2010.

Formelsammlung

K.Vetters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/

Materialien:

https://e-learning.tuhh.de/studip/dispatch.php/course/details?sem_id=df609eced045e241d39c8650979c2fe2

Lehrkonzept

Donnerstags vor Vorlesungstermin:
Video (siehe Stud.IP)

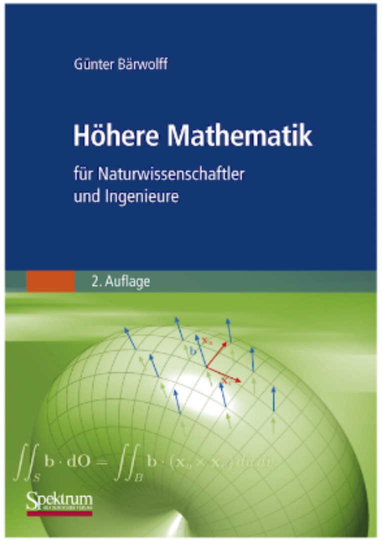
Dienstags 13-15:
Zoom-Webinar Fragen/Antworten
Bitte stellen Sie Fragen im Forum
Bitte bereiten Sie sich vor!

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.

R. Ansorge et al.: *Mathematik für Ingenieure I* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2010.



Formelsammlung

K.Vetters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/

Materialien:

https://e-learning.tuhh.de/studip/dispatch.php/course/details?sem_id=df609eced045e241d39c8650979c2fe2

Lehrkonzept

Donnerstags vor Vorlesungstermin:
Video (siehe Stud.IP)

Dienstags 13-15:
Zoom-Webinar Fragen/Antworten
Bitte stellen Sie Fragen im Forum
Bitte bereiten Sie sich vor!

Kurze Wiederholung von Grundlagen

Logische Aussagen

Postulat: Eine Aussage kann entweder wahr oder falsch sein, ein Drittes gibt es nicht.

Wahrheitswert: $\omega(A) = W$
$\omega(B) = W$
$\omega(C) = F$

Aussageform:

Beispiel:
$A(x) :=$ "$P_1 = (1,2)$, $P_2 = (2,4)$ und $P_3 = (3,x)$ liegen auf einer Geraden"

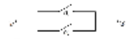
Man sieht sofort:
$A(10)$ ist wahr $\Rightarrow \omega(A(10)) = W$.

Logische Operationen

Negation:
$\bar{A}$ oder $\neg A$ definiert durch $\omega(\neg A) = F$, falls $\omega(A) = W$.

Konjunktion: $A \wedge B$
$\omega(A \wedge B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$, und $\omega(B) = W$

Alternative: $A \vee B$
$\omega(A \vee B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = F$ und $\omega(B) = F$.



Implikation: $A \Rightarrow B$
$\omega(A \Rightarrow B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$, und $\omega(B) = F$.

Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$
$\omega(A \Leftrightarrow B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = \omega(B)$.

Abbildungen (Forts.)

- **Injektiv**: Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt injektiv (eineindeutig), falls für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt:
$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$
- **Surjektiv**: Eine Abbildung f heißt surjektiv, falls es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ gibt, so dass
$$f(a) = b, \quad (\text{d.h. } f(A) = B)$$
- **Bijektiv**: Eine Abbildung f heißt bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Wahrheitswerttabellen

A	$\bar{A}$	A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
W	F	W	W	W	W	W	W
F	W	W	F	F	W	F	F
		F	W	F	W	W	F
		F	F	F	F	W	W

Abbildungen

Seien A und B Mengen. Dann verstehen wir unter einer Abbildung f von A nach B,

$$f : A \to B, \quad a \mapsto f(a),$$

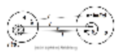
eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$, $b = f(a)$ zuordnet. Ist $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$, dann nennen wir

$$f(A') := \{y \in B \,|\, \exists x \in A' \text{ mit } y = f(x)\}$$

die Bildmenge von A', und

$$f^{-1}(B') = \{x \in A \,|\, f(x) \in B'\}$$

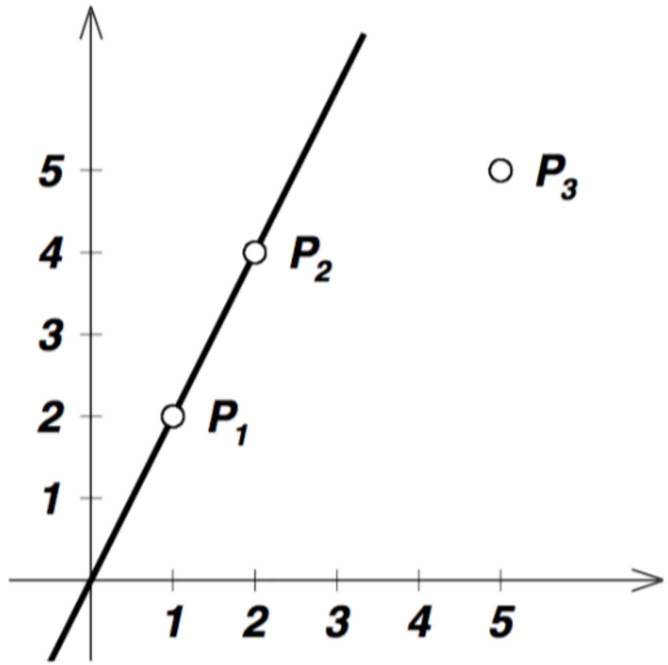
die Urbildmenge von B'.



Beispiel: Logische Aussagen

A := ”625 ist durch 5, 25 und 125 teilbar”
B := ”x2 + 1 = 0 hat keine reelle Lösung”

C := ”Die Punkte P1 = (1,2), P2 = (2,4) und P3 = (5,5) liegen auf einer Geraden



Logische Aussagen

Postulat: Eine Aussage kann entweder wahr oder falsch sein, ein Drittes gibt es nicht.

Wahrheitswert:

$$\omega(\mathsf{A}) = \mathsf{W}$$
$$\omega(\mathsf{B}) = \mathsf{W}$$
$$\omega(\mathsf{C}) = \mathsf{F}$$

Aussageform:

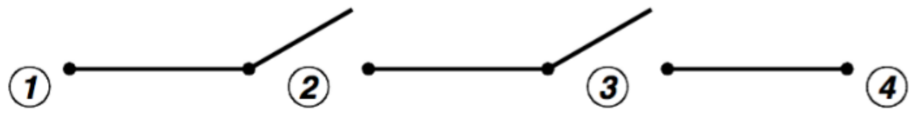
Beispiel:
A(x) $:=$ "$P_1 = (1,2)$, $P_2 = (2,4)$ und $P_3 = (5,x)$ liegen auf einer Geraden"

Man sieht sofort:
A(10) ist wahr $\Rightarrow \omega(\mathsf{A}(10)) = \mathsf{W}$.

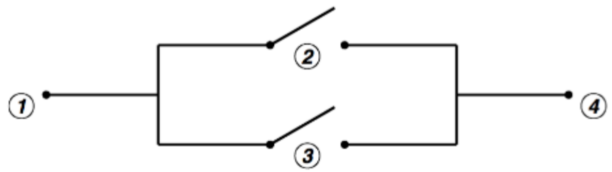
Logische Operationen

Negation:
$\bar{A}$ oder $\neg A$ definiert durch $\omega(\neg A) = F$, falls $\omega(A) = W$.

Konjunktion: $A \wedge B$
$\omega(A \wedge B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$, und $\omega(B) = W$.



Alternative: $A \vee B$
$\omega(A \vee B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = F$, und $\omega(B) = F$.



Implikation: $A \Rightarrow B$
$\omega(A \Rightarrow B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$, und $\omega(B) = F$.

Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$
$\omega(A \Leftrightarrow B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = \omega(B)$.

Wahrheitswerttabellen

A	$\overline{A}$	A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
W	F	W	W	W	W	W	W
F	W	W	F	F	W	F	F
		F	W	F	W	W	F
		F	F	F	F	W	W

Beispiel

Aussage:

$$C := (A \wedge (B \Longrightarrow \overline{A})) \Longrightarrow \overline{B}$$

Zugehörige Wahrheitswerttabelle:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$B \Longrightarrow \overline{A}$	$A \wedge (B \Longrightarrow \overline{A})$	C
W	W	F	F	F	F	W
W	F	F	W	W	W	W
F	W	W	F	W	F	W
F	F	W	W	W	F	W

C immer wahr: **Tautologie**

Indirekter Beweis

Die folgende Wahrheitswerttabelle ist gültig:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \Longrightarrow B$	$\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$	$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\overline{B} \Longrightarrow \overline{A})$
W	W	F	F	W	W	W
W	F	F	W	F	F	W
F	W	W	F	W	W	W
F	F	W	W	W	W	W

Abbildungen

Seien A und B Mengen. Dann verstehen wir unter einer **Abbildung** f von A nach B,

$$f : A \to B, \;\; a \mapsto f(a),$$

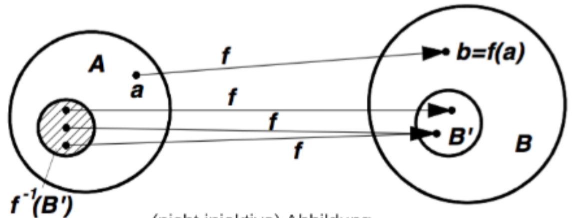
eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $a \in A$ genau ein $b \in B, \; b = f(a)$ zuordnet. Ist $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$, dann nennen wir

$$f(A') := \{y \in B | \exists x \in A' \text{ mit } y = f(x)\}$$

die **Bildmenge** von A', und

$$f^{-1}(B') := \{x \in A | f(x) \in B'\}$$

die **Urbildmenge** von B'.



(nicht injektive) Abbildung

Abbildungen (Forts.)

- **Injektiv**: Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt injektiv (eineindeutig), falls für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt:
$$a_1 \neq a_2 \ \Rightarrow \ f(a_1) \neq f(a_2).$$

- **Surjektiv**: Eine Abbildung f heißt surjektiv, falls es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ gibt, so dass
$$f(a) = b, \quad (\text{d.h. } f(A) = B)$$

- **Bijektiv**: Eine Abbildung f heißt bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Natürliche Zahlen und Vollständige Induktion

Peano Axiome

Peano Axiome zur Charakterisierung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

1) 1 ist eine natürliche Zahl.
2) Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' (Schreibweise 2=1', 3=2' usw.).
3) 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4) die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).
5) Induktionsprinzip: Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit
   (i) $1 \in A$,
   (ii) $n \in A \Longrightarrow n' \in A$.
   Dann ist $A = \mathbb{N}$.

Prinzip vollständige Induktion

Seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussageform für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Wenn die beiden Aussagen

1) $A(n_0)$ ist wahr,
2) für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$: $A(k)$ ist wahr $\Longrightarrow A(k+1)$ ist wahr

gelten, dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Fundamentalsatz der Arithmetik

Jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich auf eine und nur eine Weise als Produkt endlich vieler Primzahlen darstellen, wenn man die Primzahlen der Größe nach ordnet. Danach lässt sich jede natürliche Zahl $n > 1$ auf genau eine Weise durch ein Produkt aus Primzahlpotenzen darstellen:

$$n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots p_k^{\nu_k}$$

mit $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ und $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$.

Peano Axiome

Peano Axiome zur Charakterisierung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

1) 1 ist eine natürliche Zahl.
2) Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' (Schreibweise 2=1', 3=2' usw.).
3) 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4) die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).
5) Induktionsprinzip: Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit
   (i) $1 \in A$,
   (ii) $n \in A \Longrightarrow n' \in A$.
   Dann ist $A = \mathbb{N}$.

Prinzip vollständige Induktion

Seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussageform für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Wenn die beiden Aussagen

1) $A(n_0)$ ist wahr,

2) für alle $k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0: \quad A(k)$ ist wahr $\Longrightarrow A(k+1)$ ist wahr

gelten, dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Fundamentalsatz der Arithmetik

Jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich auf eine und nur eine Weise als Produkt endlich vieler Primzahlen darstellen, wenn man die Primzahlen der Größe nach ordnet. Danach lässt sich jede natürliche Zahl $n > 1$ auf genau eine Weise durch ein Produkt aus Primzahlpotenzen darstellen:

$$n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_k^{\nu_k}$$

mit $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{P}$, $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ und $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$.

Ganze, rationale und reelle Zahlen

Ganze Zahlen

Problem: $n + x = m$ ist nur lösbar, falls $m > n$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \dots\}$$

ein. Dann hat $n + x = m$ für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

Also: $\mathbb{Z}$ abgeschlossen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation

Rationale Zahlen

Problem: $n \cdot x = m$ ist nur lösbar in $\mathbb{Z}$, falls n Teiler von m!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Q} = \{q \mid q = \tfrac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ a, b \text{ teilerfremd}\}$$

ein. Dann hat $n \cdot x = m$ in $\mathbb{Q}$ die Lösung $x = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$.

Bemerkungen:

①

Dezimalbrüche

Beobachtung: Darstellung als Dezimalzahl. Beispiel $\frac{9}{8} = 1,125$ oder

$$1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}.$$

Es gilt: $a \in \mathbb{Q}$ ⇔ a darstellbar als ...

Kurzform: ...

Reelle Zahlen

Problem: $x \cdot x = 2$ ist nicht lösbar in $\mathbb{Q}$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist unendlicher Dezimalbruch}\}$$

ein.

Bemerkungen:

- Problematisch: Aufschreiben solcher nichtperiodischer Dezimalbrüche. Man kann nur Näherungen angeben, z.B.

$$1,41;\quad 1,414;\quad 1,4142;\quad 1,41421\ \dots$$

für $x = \sqrt{2}$

- Beim Rechnen mit diesen nichtperiodischen Dezimalbrüchen muss man sich im Allg. auch auf Näherungswerte in Form endlicher Dezimalbrüche stützen

②

Ganze Zahlen

Problem: $n + x = m$ ist nur lösbar, falls $m > n$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots\}$$

ein. Dann hat $n + x = m$ für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

Also: $\mathbb{Z}$ abgeschlossen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation

Rationale Zahlen

Problem: $n \cdot x = m$ ist nur lösbar in $\mathbb{Z}$, falls n Teiler von m!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Q} = \{q \mid q = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ a, b \text{ teilerfremd}\}$$

ein. Dann hat $n \cdot x = m$ in $\mathbb{Q}$ die Lösung $x = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$.

Bemerkungen:

- "a, b teilerfremd" $\Rightarrow$ Brüche, die nur durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen, sind keine eigenständigen Elemente in $\mathbb{Q}$
- Grundlage dafür: Primfaktorenzerlegung von Zähler und Nenner. Es wird solange "gekürzt", bis in Zähler und Nenner nur noch unterschiedliche Primzahlen vorhanden sind oder, was dasselbe ist, $ggT(a, b) = 1$

Dezimalbrüche

Beobachtung: Darstellung als Dezimalzahl. Beispiel $\frac{9}{8} = 1,125$, oder

$$1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}.$$

Es gilt: $a \in \mathbb{Q} \to a$ darstellbar als *unendlicher periodischer Dezimalbruch*:

$$a = \sum_{n=0}^{m} z_{m-n} 10^{m-n} + \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k} 10^{-k} \, , z_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

Kurzform: $a = z_m z_{m-1} \ldots z_0, z_{-1} z_{-2} \ldots$

Beispiel: $\frac{1}{7} = 0,142857142857142857\ldots$

oder:

$$\frac{1}{7} = 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-6} + ...$$

Periode: 142857

$\frac{90}{8} = 11,25000\ldots$

oder:

$$1 \cdot 10^{1} + 1 \cdot 10^{0} + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}.$$

Periode: 0.

Reelle Zahlen

Problem: $x \cdot x = 2$ ist nicht lösbar in $\mathbb{Q}$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist unendlicher Dezimalbruch}\}$$

ein.

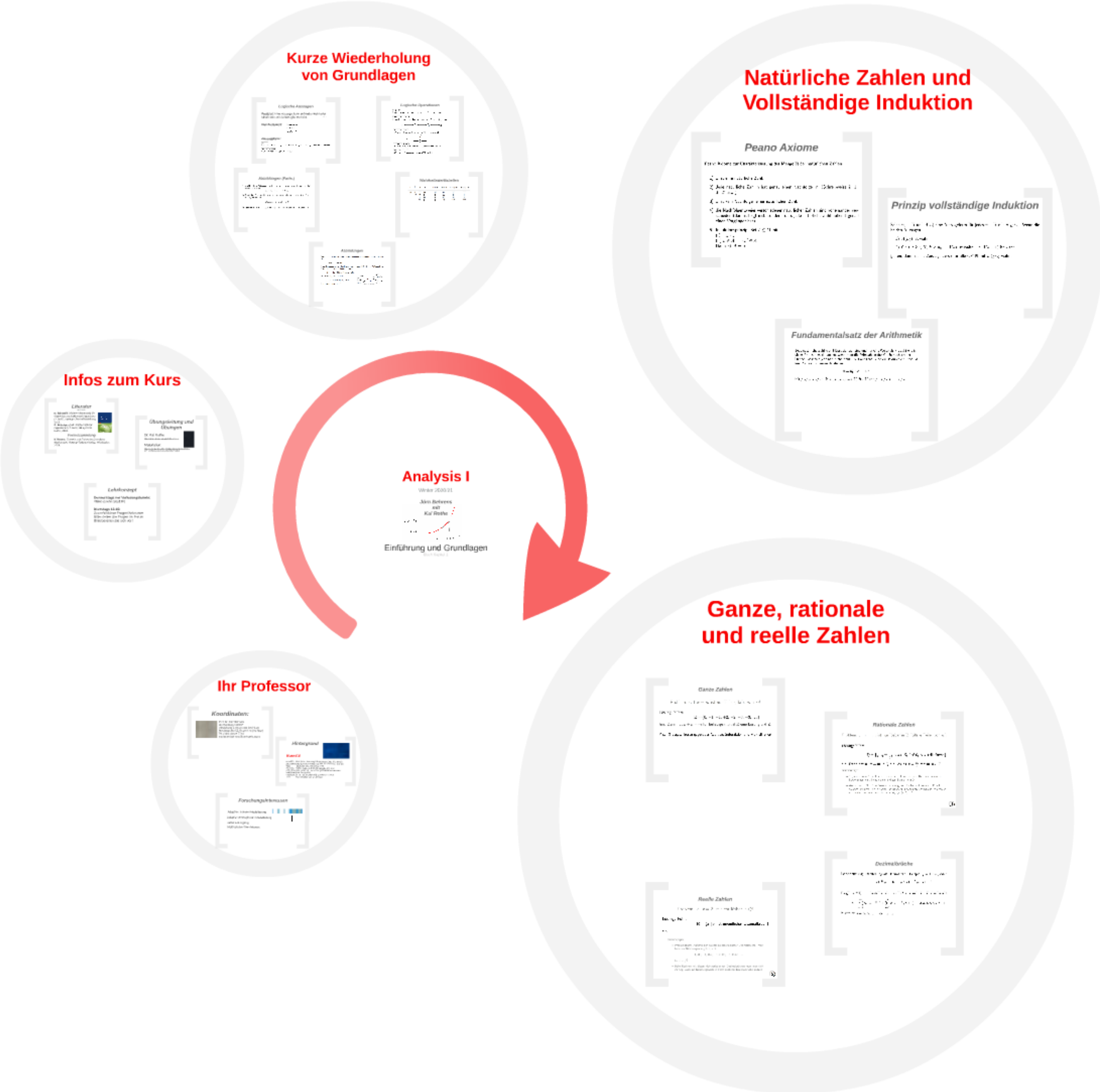
Bemerkungen:

- Problematisch: Aufschreiben solcher nichtperiodischer Dezimalbrüche. Man kann nur Näherungen angeben, z.B.

  $$1,41\ ; \quad 1,414\ ; \quad 1,4142\ ; \quad 1,41421\ \ldots$$

  für $x = \sqrt{2}$

- Beim Rechnen mit diesen nichtperiodischen Dezimalbrüchen muss man sich im Allg. auch auf Näherungswerte in Form endlicher Dezimalbrüche stützen


Kurze Wiederholung von Grundlagen
Natürliche Zahlen und Vollständige Induktion
Peano Axiome
Prinzip vollständige Induktion
Fundamentalsatz der Arithmetik
Infos zum Kurs
Analysis I
Winter 2020/21
Jörn Behrens
mit
Kai Rothe
Einführung und Grundlagen
Ganze, rationale und reelle Zahlen
Ihr Professor