

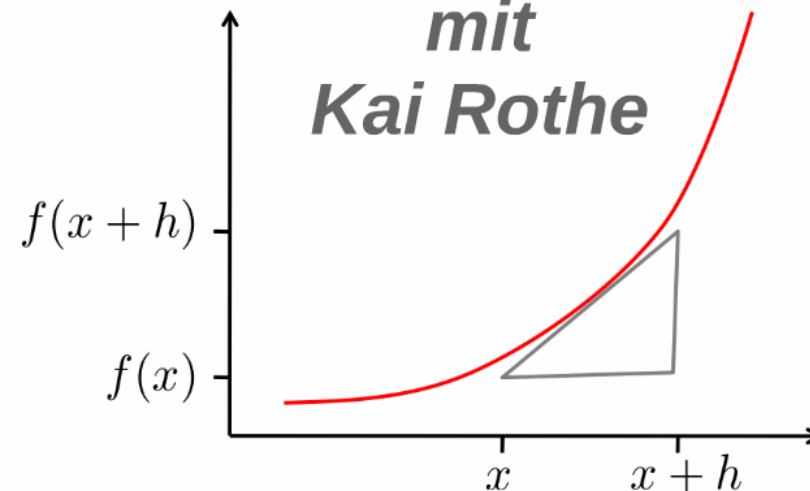
Analysis I

Winter 2020/21

Jörn Behrens

mit

Kai Rothe



Einführung und Grundlagen

Buch Kapitel 1

Ihr Professor

Koordinaten:



Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ CiSAP
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Hintergrund

Kurz-CV



seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

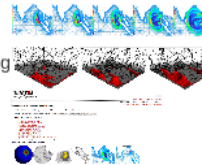
Forschungsinteressen

Adaptive Tsunami Modellierung

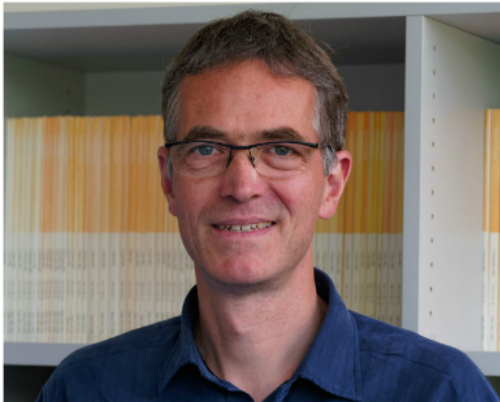
Adaptive Atmosphären Modellierung

Gitter Erzeugung

Multi-Skalen Simulationen



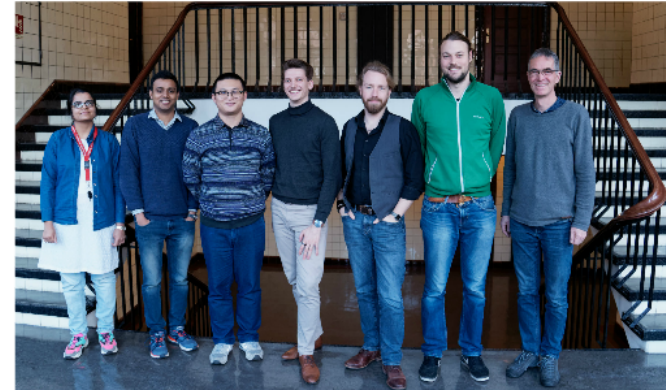
Koordinaten:



Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ CliSAP
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Hintergrund

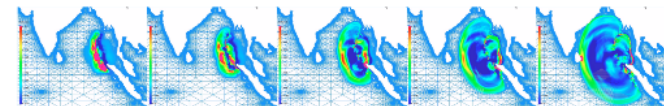
Kurz-CV



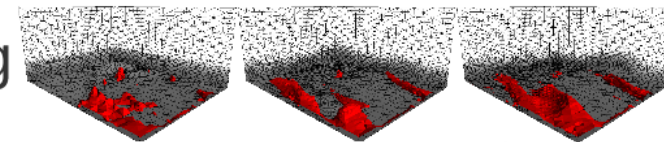
seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

Forschungsinteressen

Adaptive Tsunami Modellierung

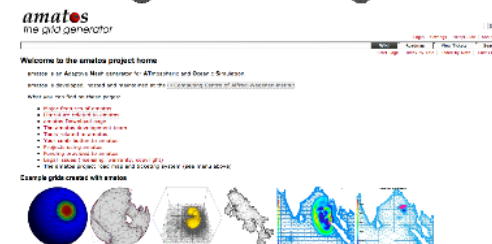


Adaptive Atmosphären Modellierung



Gitter Erzeugung

Multi-Skalen Simulationen



Infos zum Kurs

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolf: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.

R. Ansorge et al.: *Mathematik für Ingenieure I* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2010.



Formelsammlung

K. Veters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

<https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/>



Materialien:

https://e-learning.tuhh.de/studipdispach.php?courseidetails?sem_id=rl603eece045e241d39c6650973c26e2

Lehrkonzept

Donnerstags vor Vorlesungstermin:
Video (siehe Stud.IP)

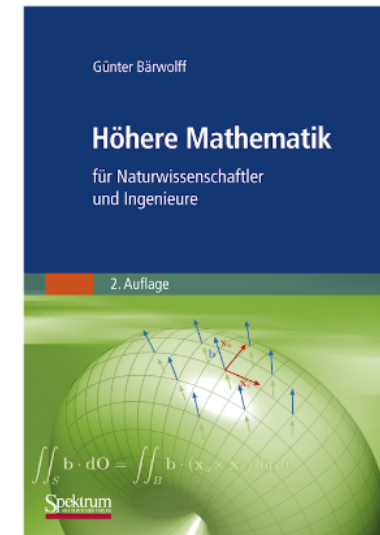
Dienstags 13-15:
Zoom-Webinar Fragen/Antworten
Bitte stellen Sie Fragen im Forum
Bitte bereiten Sie sich vor!

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.

R. Ansorge et al.: *Mathematik für Ingenieure I* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2010.



Formelsammlung

K. Vettters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

<https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/>

Materialien:

[https://e-learning.tuhh.de/studip/dispatch.php/course/details?
sem_id=df609eced045e241d39c8650979c2fe2](https://e-learning.tuhh.de/studip/dispatch.php/course/details?sem_id=df609eced045e241d39c8650979c2fe2)



Lehrkonzept

Donnerstags vor Vorlesungstermin:
Video (siehe Stud.IP)

Dienstags 13-15:
Zoom-Webinar Fragen/Antworten
Bitte stellen Sie Fragen im Forum
Bitte bereiten Sie sich vor!

Kurze Wiederholung von Grundlagen

Logische Aussagen

Postulat: Eine Aussage kann entweder wahr oder falsch sein, ein Drittes gibt es nicht.

Wahrheitswert: $w(A) = W$
 $w(B) = W$
 $w(C) = F$

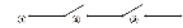
Aussageform:

Beispiel:
 $A(1) = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 4\}$ und $D = \{2, 3\}$ liegen auf einer Geraden!
 Man stellt selbst:
 $A(10)$ ist wahr $\Rightarrow w(A(10)) = W$

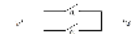
Logische Operationen

Negation: A oder \neg definiert durch $w(\neg A) = 1 - w(A)$

Konjunktion: $A \wedge B$
 $w(A \wedge B) = W$ genau dann, wenn $w(A) = W$ und $w(B) = W$



Alternativ: $A \vee B$
 $w(A \vee B) = F$ genau dann, wenn $w(A) = F$ und $w(B) = F$



Implikation: $A \rightarrow B$
 $w(A \rightarrow B) = F$ genau dann, wenn $w(A) = W$ und $w(B) = F$

Äquivalenz: $A \leftrightarrow B$
 $w(A \leftrightarrow B) = W$ genau dann, wenn $w(A) = w(B)$

Abbildungen (Forts.)

• **Injektiv:** Eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ heißt injektiv (eindeutig), falls für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt:
 $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

• **Surjektiv:** Eine Abbildung f heißt surjektiv, falls es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ gibt, so dass

$$f(a) = b, \text{ d.h. } f(A) = B$$

• **Bijektiv:** Eine Abbildung f heißt bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Wahrheitstabellen

A	A	A	B	A ∧ B	A ∨ B	A ⇒ B	A ⇔ B
W	F	W	W	W	W	W	W
F	W	W	F	F	W	F	F
F	F	W	F	F	W	W	F
F	F	F	F	F	F	W	W

Abbildungen

Seien A und B Mengen. Dann verstehen wir unter einer Abbildung f von A nach B

$$f: A \rightarrow B, x \mapsto f(x),$$

eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ ($b = f(a)$) zuordnet.

Man hat $f: A \rightarrow B$, dann muss man vor

$$f(x) = b \text{ } (b \in B) \text{ } \Leftrightarrow \text{ } \exists a(x) \in A \text{ } (x = f(a))$$

die Bildmenge von A , und

$$f^{-1}(B) = \{a \in A \mid f(a) \in B\}$$

die Urbildmenge von B .

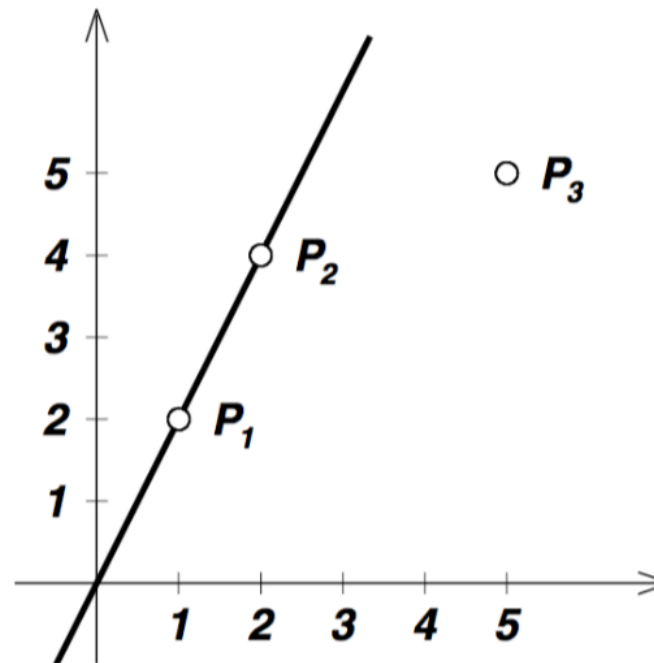


Beispiel: Logische Aussagen

A := "625 ist durch 5, 25 und 125 teilbar"

B := " $x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung"

C := "Die Punkte $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (2,4)$ und $P_3 = (5,5)$ liegen auf einer Geraden"



Logische Aussagen

Postulat: Eine Aussage kann entweder wahr oder falsch sein, ein Drittes gibt es nicht.



Wahrheitswert:

$$\omega(A) = W$$
$$\omega(B) = W$$
$$\omega(C) = F$$

Aussageform:

Beispiel:

$A(x) := "P_1 = (1, 2), P_2 = (2, 4) \text{ und } P_3 = (5, x) \text{ liegen auf einer Geraden}"$

Man sieht sofort:

$A(10) \text{ ist wahr} \Rightarrow \omega(A(10)) = W.$

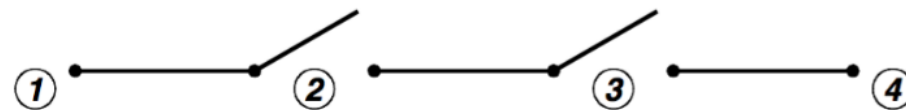
Logische Operationen

Negation:

\bar{A} oder $\neg A$ definiert durch $\omega(\neg A) = F$, falls $\omega(A) = W$.

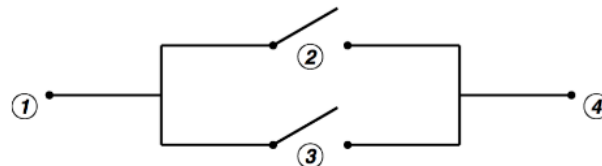
Konjunktion: $A \wedge B$

$\omega(A \wedge B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$, und $\omega(B) = W$.



Alternative: $A \vee B$

$\omega(A \vee B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = F$, und $\omega(B) = F$.



Implikation: $A \Rightarrow B$

$\omega(A \Rightarrow B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$, und $\omega(B) = F$.

Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$

$\omega(A \Leftrightarrow B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = \omega(B)$.

Wahrheitwerttabellen

A	\bar{A}	A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \implies B$	$A \iff B$
W	F	W	W	W	W	W	W
F	W	W	F	F	W	F	F
		F	W	F	W	W	F
		F	F	F	F	W	W

Beispiel

Aussage:

$$C := (A \wedge (B \implies \bar{A})) \implies \bar{B}$$

Zugehörige Wahrheitstabelle:

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$B \implies \bar{A}$	$A \wedge (B \implies \bar{A})$	C
W	W	F	F	F	F	W
W	F	F	W	W	W	W
F	W	W	F	W	F	W
F	F	W	W	W	F	W

C immer wahr: **Tautologie**

Indirekter Beweis

Die folgende Wahrheitstabelle ist gültig:

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$A \implies B$	$\bar{B} \implies \bar{A}$	$(A \implies B) \iff (\bar{B} \implies \bar{A})$
W	W	F	F	W	W	W
W	F	F	W	F	F	W
F	W	W	F	W	W	W
F	F	W	W	W	W	W

Abbildungen

Seien A und B Mengen. Dann verstehen wir unter einer **Abbildung** f von A nach B ,

$$f : A \rightarrow B, \quad a \mapsto f(a),$$

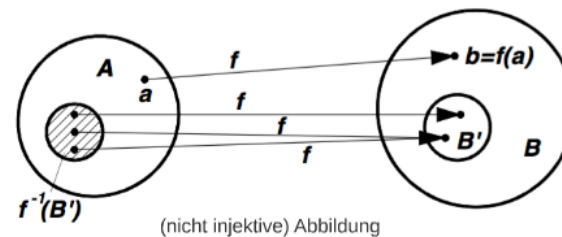
eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$, $b = f(a)$ zuordnet. Ist $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$, dann nennen wir

$$f(A') := \{y \in B \mid \exists x \in A' \text{ mit } y = f(x)\}$$

die **Bildmenge** von A' , und

$$f^{-1}(B') := \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$$

die **Urbildmenge** von B' .



Abbildungen (Forts.)

- **Injektiv:** Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt injektiv (eineindeutig), falls für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt:

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$

- **Surjektiv:** Eine Abbildung f heißt surjektiv, falls es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ gibt, so dass

$$f(a) = b, \quad (\text{d.h. } f(A) = B)$$

- **Bijektiv:** Eine Abbildung f heißt bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Natürliche Zahlen und Vollständige Induktion

Peano Axiome

Peano Axiome zur Charakterisierung der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen

- 1) 1 ist eine natürliche Zahl.
- 2) Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' (Schreibweise $2=1'$, $3=2'$ usw.).
- 3) 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
- 4) die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).
- 5) Induktionsprinzip: Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit
 - (i) $1 \in A$,
 - (ii) $n \in A \implies n' \in A$.Dann ist $A = \mathbb{N}$.

Prinzip vollständige Induktion

Seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(x)$ eine Aussageform für jedes $x \in \mathbb{N}$ mit $x \geq n_0$. Wenn die beiden Aussagen

- 1) $A(n_0)$ ist wahr,
 - 2) für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$: $A(k)$ ist wahr $\implies A(k+1)$ ist wahr
- gelten, dann ist die Aussage
- $A(x)$
- für alle
- $x \in \mathbb{N}$
- mit
- $x \geq n_0$
- wahr.

Fundamentalsatz der Arithmetik

Jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich auf eine und nur eine Weise als Produkt endlich vieler Primzahlen darstellen (wenn man die Primzahlen der Größe nach ordnet). Danach lässt sich jede natürliche Zahl $n > 1$ auf genau eine Weise durch ein Produkt aus Primzahlpotenzen darstellen.

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

mit $p_1, p_2, \dots, p_r \in \mathbb{P}$, $p_1 < p_2 < \dots < p_r \in \mathbb{P}$, $p_i \in \mathbb{N}$ und $p_1 < p_2 < \dots < p_r$.

Peano Axiome

Peano Axiome zur Charakterisierung der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen

- 1) 1 ist eine natürliche Zahl.
- 2) Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' (Schreibweise $2=1'$, $3=2'$ usw.).
- 3) 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
- 4) die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).
- 5) Induktionsprinzip: Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit
 - (i) $1 \in A$,
 - (ii) $n \in A \implies n' \in A$.Dann ist $A = \mathbb{N}$.

Prinzip vollständige Induktion

Seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussageform für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Wenn die beiden Aussagen

1) $A(n_0)$ ist wahr,

2) für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$: $A(k)$ ist wahr $\implies A(k+1)$ ist wahr

gelten, dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Fundamentalsatz der Arithmetik

Jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich auf eine und nur eine Weise als Produkt endlich vieler Primzahlen darstellen, wenn man die Primzahlen der Größe nach ordnet. Danach lässt sich jede natürliche Zahl $n > 1$ auf genau eine Weise durch ein Produkt aus Primzahlpotenzen darstellen:

$$n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \cdots p_k^{\nu_k}$$

mit $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{P}$, $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ und $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$.



Ganze, rationale und reelle Zahlen

Ganze Zahlen

Problem: $a + x = m$ ist nur lösbar, falls $m \geq a$

Lösung: Führe $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 13, -3, \dots\}$ ein. Dann hat $a + x = m$ für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.
Also: \mathbb{Z} abgeschlossen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation

Rationale Zahlen

Problem: $a + x = m$ ist nur lösbar in \mathbb{Q} , falls a Teiler von m

Lösung: Führe $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, a, b \text{ teilerfremd} \}$ ein. Dann hat $a + x = m$ in \mathbb{Q} die Lösung $x = \frac{m-a}{a}$ mit $m, a \in \mathbb{Z}$.
Bemerkungen:
• \mathbb{Q} ist kleinste \mathbb{R} -Erweiterung des \mathbb{Z} mit einer Stelle $\frac{1}{a}$ für jedes $a \in \mathbb{Z}$.
• Einmal $\frac{1}{a}$ für $a = 2$ heißt $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ heißt $\frac{1}{3}$.
• Einmal $\frac{1}{a}$ für $a = 2$ heißt $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ heißt $\frac{1}{3}$.
• Einmal $\frac{1}{a}$ für $a = 2$ heißt $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ heißt $\frac{1}{3}$.



Reelle Zahlen

Problem: $a + x = 2$ ist nicht lösbar in \mathbb{Q}

Lösung: Führe $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist unendlicher Dezimalbruch}\}$ ein.

Bemerkungen:
• Problematisch: Aufschreiben solcher nichtperiodischer Dezimalbrüche. Man kann nur Näherungen angeben, z.B. $1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421$...
für $x = \sqrt{2}$
• Beim Rechnen mit diesen nichtperiodischen Dezimalbrüchen muss man sich im Allg. auch auf Näherungswerte in Form solcher Dezimalbrüche stützen



Dezimalbrüche

Beobachtung: Darstellung als Dezimalzahl. Beispiel $\frac{1}{2} = 1,125$ oder $1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$.

Es gilt: $x \in \mathbb{Q} \iff x$ darstellbar als **terminierendes** Dezimalbrüche
$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot 10^{-k} \quad (a_0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$$

Kurzform: $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n b_1 b_2 \dots$

Ganze Zahlen

Problem: $n + x = m$ ist nur lösbar, falls $m > n$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \dots\}$$

ein. Dann hat $n + x = m$ für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

Also: \mathbb{Z} abgeschlossen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation

Rationale Zahlen

Problem: $n \cdot x = m$ ist nur lösbar in \mathbb{Z} , falls n Teiler von m !

Lösung: Führe

$$\mathbb{Q} = \left\{ q \mid q = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, a, b \text{ teilerfremd} \right\}$$

ein. Dann hat $n \cdot x = m$ in \mathbb{Q} die Lösung $x = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$.

Bemerkungen:

- "a, b teilerfremd" \Rightarrow Brüche, die nur durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen, sind keine eigenständigen Elemente in \mathbb{Q}
- Grundlage dafür: Primfaktorenzerlegung von Zähler und Nenner. Es wird solange "gekürzt", bis in Zähler und Nenner nur noch unterschiedliche Primzahlen vorhanden sind oder, was dasselbe ist, $\text{ggT}(a, b) = 1$

Dezimalbrüche

Beobachtung: Darstellung als Dezimalzahl. Beispiel $\frac{9}{8} = 1,125$, oder

$$1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}.$$

Es gilt: $a \in \mathbb{Q} \rightarrow a$ darstellbar als *unendlicher periodischer Dezimalbruch*:

$$a = \sum_{n=0}^m z_{m-n} 10^{m-n} + \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k} 10^{-k}, z_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Kurzform: $a = z_m z_{m-1} \dots z_0, z_{-1} z_{-2} \dots$

Beispiel: $\frac{1}{7} = 0,142857142857142857\dots$

oder:

$$\frac{1}{7} = 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-6} + \dots$$

Periode: 142857

$$\frac{90}{8} = 11,25000\dots$$

oder:

$$1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}.$$

Periode: 0.

Reelle Zahlen

Problem: $x \cdot x = 2$ ist nicht lösbar in \mathbb{Q} !

Lösung: Führe

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist unendlicher Dezimalbruch}\}$$

ein.

Bemerkungen:

- Problematisch: Aufschreiben solcher nichtperiodischer Dezimalbrüche. Man kann nur Näherungen angeben, z.B.

$$1,41; \quad 1,414; \quad 1,4142; \quad 1,41421 \dots$$

für $x = \sqrt{2}$

- Beim Rechnen mit diesen nichtperiodischen Dezimalbrüchen muss man sich im Allg. auch auf Näherungswerte in Form endlicher Dezimalbrüche stützen

Kurze Wiederholung von Grundlagen

Logische Aussagen
Wahrheitswert, Wahrheitstafel, Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz

Logische Operationen
Mengenoperationen, De Morgan'sche Gesetze, Distributivgesetz

Mengenlehre
Mengen, Teilmengen, Potenzmenge, Schnittmenge, Vereinigung, Differenz

Mathematische Beweismethoden
Direkter Beweis, Widerspruchsbeweis, Induktion

Axiome
Axiome der Arithmetik, Axiome der reellen Zahlen

Natürliche Zahlen und Vollständige Induktion

Peano Axiome
Axiome der natürlichen Zahlen

Prinzip vollständige Induktion
Prinzip der vollständigen Induktion

Fundamentalsatz der Arithmetik
Fundamentalsatz der Arithmetik

Infos zum Kurs

Lehrer
Prof. Dr. ...

Übersetzung und Umfang
Übersetzung und Umfang

Lehrkonzept
Lehrkonzept



Analysis I
Wintersemester 2020/21
Jens Behrens
Prof. Dr. ...
Einführung und Grundlagen

Ganze, rationale und reelle Zahlen

Ganze Zahlen
Ganze Zahlen

Rationale Zahlen
Rationale Zahlen

Reelle Zahlen
Reelle Zahlen

Dedekindsche
Dedekindsche

Ihr Professor

Koordinaten
Koordinaten

Abstrakte
Abstrakte

Forschungsprojekte
Forschungsprojekte