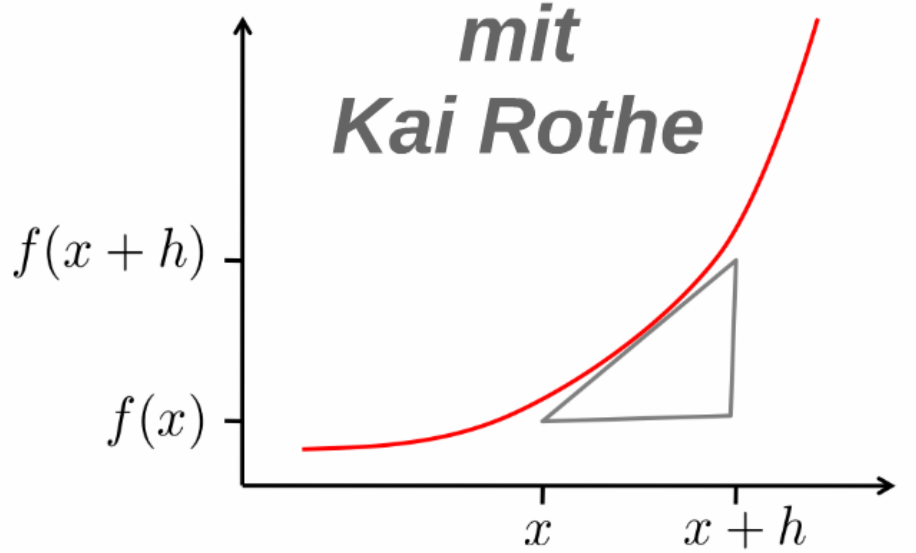
Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens

mit

Kai Rothe



Ungleichungen, Komplexe Zahlen und Funktionen

Buch Kapitel 2

Ungleichungen und Beträge

Grundlage: Axiome

Axiom 1: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gelte genau eine der Beziehungen:

$$x < y \quad x = y \quad x > y.$$

Axiom 2: Es gelte die Implikation:

$$x < y \wedge a \leq b \quad \Rightarrow \quad x + a < y + b.$$

Axiom 3: Es gelte die Implikation:

$$x < y \wedge 0 < a \quad \Rightarrow \quad ax < ay.$$

Rechenregeln für Ungleichungen

Rechenregeln: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > b$. Dann gilt:

1. $\forall c \in \mathbb{R}: \quad a + c > b + c$
2. $\forall c \in \mathbb{R},\ c > 0: \quad a \cdot c > b \cdot c$
3. $\forall c \in \mathbb{R},\ c < 0: \quad a \cdot c < b \cdot c$
4. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, falls $a > b > 0$
5. $a > b \wedge c > d \quad \Rightarrow \quad a + c > b + d$
6. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad a^n > b^n$
7. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Rechenregeln für Beträge

Rechenregeln: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

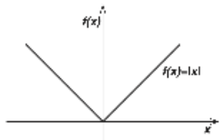
1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
2. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, falls $b \neq 0$
3. $|a| < b \quad \Leftrightarrow \quad -b < a < b$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)
5. $|a + b| \geq ||a| - |b||$

④

Definition des Betrages

Betrag: $x \in \mathbb{R}$, dann ist $|x|$ definiert:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls} \quad x > 0, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0, \\ -x & \text{falls} \quad x < 0. \end{cases}$$



Grundlage: Axiome

Axiom 1: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gelte genau eine der Beziehungen:

$$x < y \quad x = y \quad x > y.$$

Axiom 2: Es gelte die Implikation:

$$x < y \wedge a \leq b \quad \Rightarrow \quad x + a < y + b.$$

Axiom 3: Es gelte die Implikation:

$$x < y \wedge 0 < a \quad \Rightarrow \quad ax < ay.$$

Rechenregeln für Ungleichungen

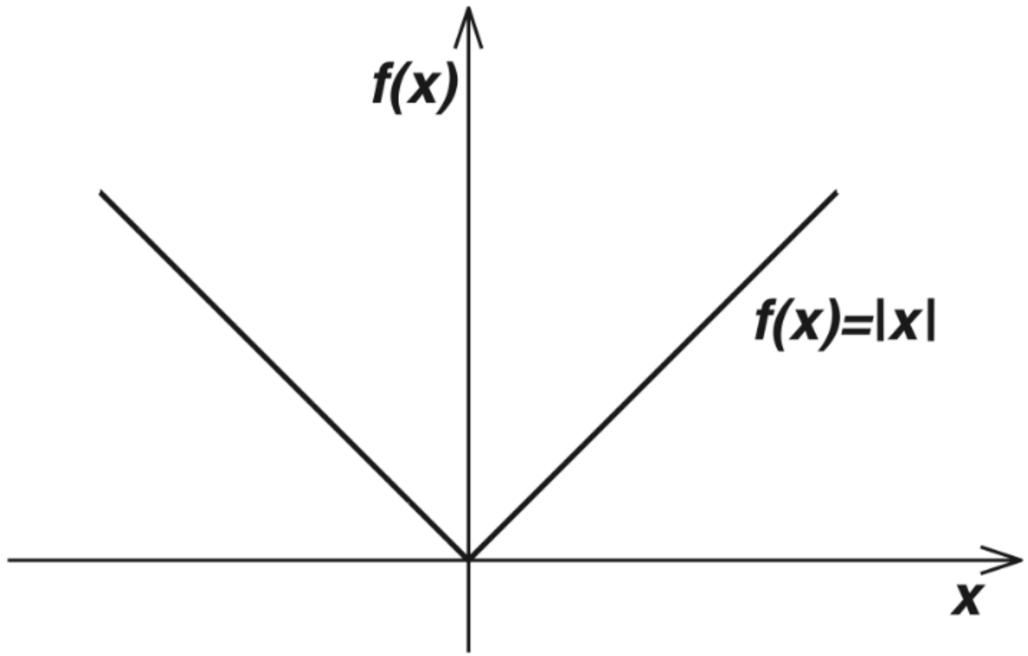
Rechenregeln: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > b$. Dann gilt:

1. $\forall c \in \mathbb{R}: \quad a + c > b + c$
2. $\forall c \in \mathbb{R},\ c > 0: \quad a \cdot c > b \cdot c$
3. $\forall c \in \mathbb{R},\ c < 0: \quad a \cdot c < b \cdot c$
4. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, falls $a > b > 0$
5. $a > b \land c > d \quad \Rightarrow \quad a + c > b + d$
6. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad a^n > b^n$
7. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Definition des Betrages

Betrag: $x \in \mathbb{R}$, dann ist $|x|$ definiert:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls} \quad x > 0, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0, \\ -x & \text{falls} \quad x < 0. \end{cases}$$



Rechenregeln für Beträge

Rechenregeln: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
2. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, falls $b \neq 0$
3. $|a| < b \quad \Leftrightarrow \quad -b < a < b$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)
5. $|a + b| \geq ||a| - |b||$

Komplexe Zahlen

Motivation

Erinnerung:

- $\mathbb{Z}$: Die Gleichung $n + x = m$ lösbar für alle $n, m \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q}$: Die Gleichung $n \cdot x = m$ lösbar für alle $n, m \in \mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$: Die Gleichung $x \cdot x = q$ lösbar für alle $q \in \mathbb{R}$

Problem: $x^2 + px + q = 0$ ist nicht lösbar für beliebige $p, q \in \mathbb{R}$!

Denn: Verwende pq-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Formel ist nicht lösbar für $\frac{p^2}{4} - q < 0$!

Definition

Idee: Führe Zahlenraum ein, der $\sqrt{-1}$ enthält.

Definition

1. Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$: $z := a + b \cdot i$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.
   a heißt *Realteil* von z: $a =: Re\, z$.
   b heißt *Imaginärteil* von z: $b =: Im\, z$.
2. Gleichheit: Für $z_1 = a_1 + b_1 i \in \mathbb{C}$ und $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ gilt:
   $$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2.$$
   Insbesondere $z = a + bi = 0$ falls $a = 0 \wedge b = 0$.
3. Konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$: zu $z = a + bi$ ist $\bar{z} = a - bi$.
4. Betrag $|z|$ zu $z = a + bi$ ist $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bemerkung: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, denn $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : Im\, z = 0\}$

Rechenregeln

Addition/Subtraktion:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$$

Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

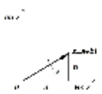
Division: (sei $z_2 = (a_2 + b_2 i) \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)}$$
$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 - b_2^2} i = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Polarkoordinaten

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

1. [illegible] (r, ϕ)
2. r [illegible] Betrag von z (Abstand vom Ursprung) [illegible]
3. ϕ [illegible] (Winkel zur x-Achse)



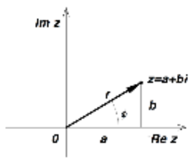
Bemerkungen:

- ϕ nur bis auf Vielfache von π bestimmt. Betrachte $\phi \in [-\pi, \pi]$
- Es gilt: $a = r \cos \phi$ und $b = r \sin \phi$
- Umgekehrt gilt: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ und $\tan \phi = \frac{b}{a}$, $(a \neq 0)$
- Falls $a = 0$:
  $$\phi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{falls } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{falls } b < 0 \end{cases}$$
- Falls $z = 0$, so ist $r = 0$ und ϕ unbestimmt

Gaußsche Zahlenebene

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

1. Führe in Ebene kartesisches Koordinatensystem (x, y) ein.
2. Trage $a = Re\, z$ auf der x-Achse auf.
3. Trage $b = Im\, z$ auf der y-Achse auf.



Motivation

Erinnerung:

- $\mathbb{Z}$: Die Gleichung $n + x = m$ lösbar für alle $n, m \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q}$: Die Gleichung $n \cdot x = m$ lösbar für alle $n, m \in \mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$: Die Gleichung $x \cdot x = q$ lösbar für alle $q \in \mathbb{R}$

Problem: $x^2 + px + q = 0$ ist nicht lösbar für beliebige $p, q \in \mathbb{R}$!

Denn: Verwende pq-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

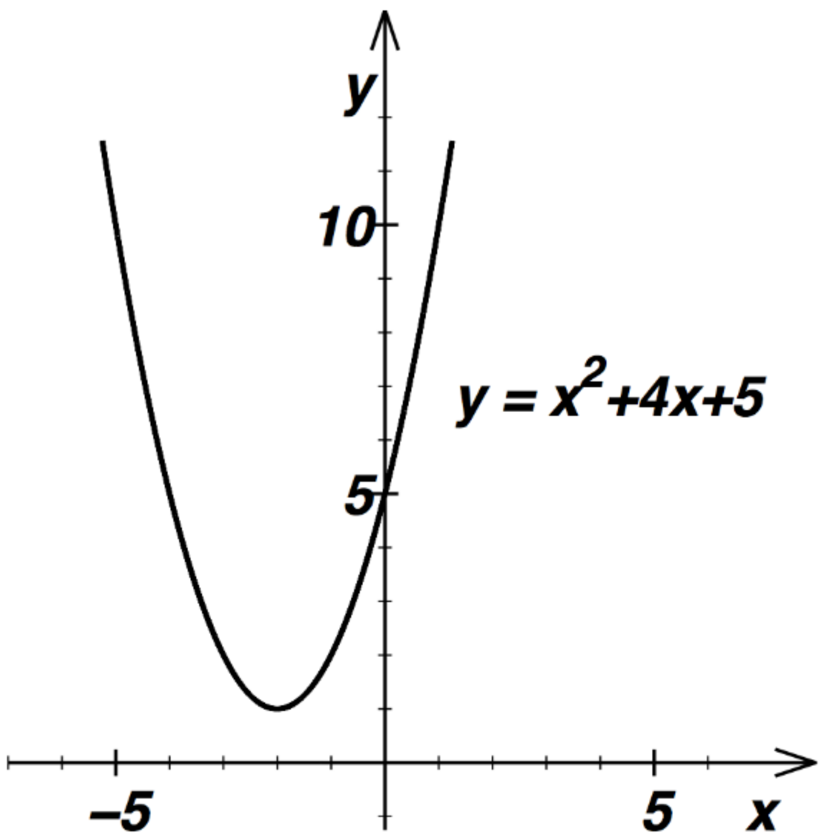
Formel ist nicht lösbar für $\frac{p^2}{4} - q < 0$!

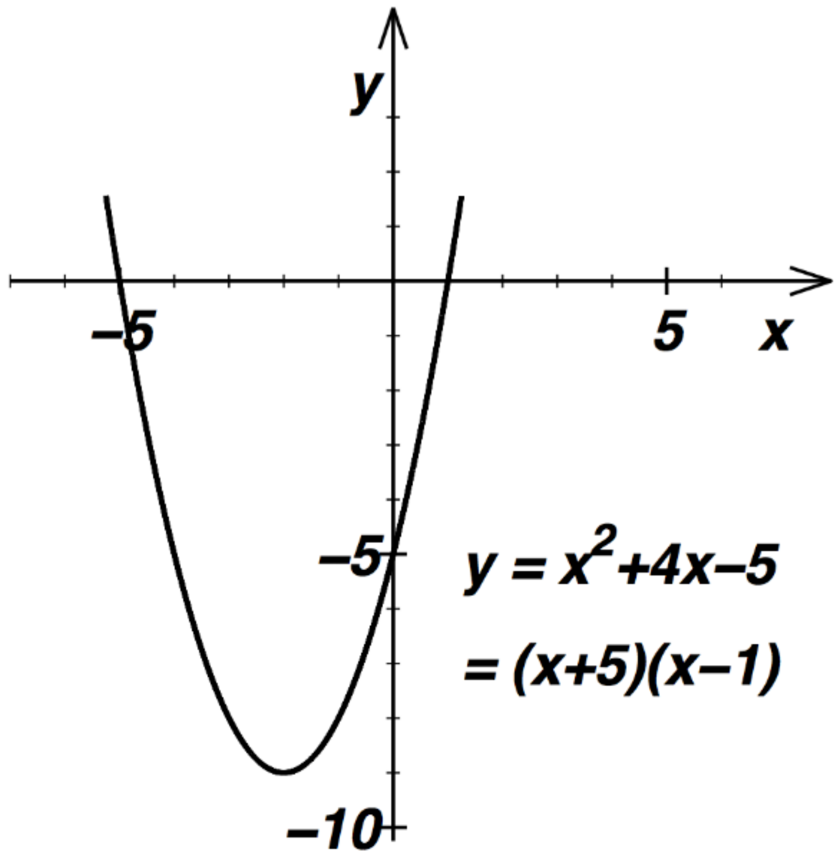
Beispiel:

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm \sqrt{-1}$$

Graphische Veranschaulichung:





Definition

Idee: Führe Zahlenraum ein, der $\sqrt{-1}$ enthält.

Definition:

1. Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$: $z := a + b \cdot i$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.
   a heißt *Realteil* von z: $a =: Rez$,
   b heißt *Imaginärteil* von z: $b =: Imz$

2. Gleichheit: Für $z_1 = a_1 + b_1 i \in \mathbb{C}$ und $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ gelte:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2.$$

   Insbesondere $z = a + bi = 0$ falls $a = 0 \wedge b = 0$.

3. Konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$: zu $z = a + bi$ ist $\bar{z} = a - bi$.

4. Betrag $|z|$: zu $z = a + bi$ ist $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bemerkung: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ – denn $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \; Imz = 0\}$

Rechenregeln

Addition/Subtraktion:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i$$

Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

Division: (sei $z_2 = (a_2 + b_2 i) \neq 0$)

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a_1 + b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \frac{z_1 \bar{z_2}}{|z_2|^2} \end{aligned}$$

Rechenregeln für komplex Konjugierte

Seien $z = a + bi$ und $\bar{z} = a - bi$. Dann gilt:

1. $z + \bar{z} = 2a$
2. $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

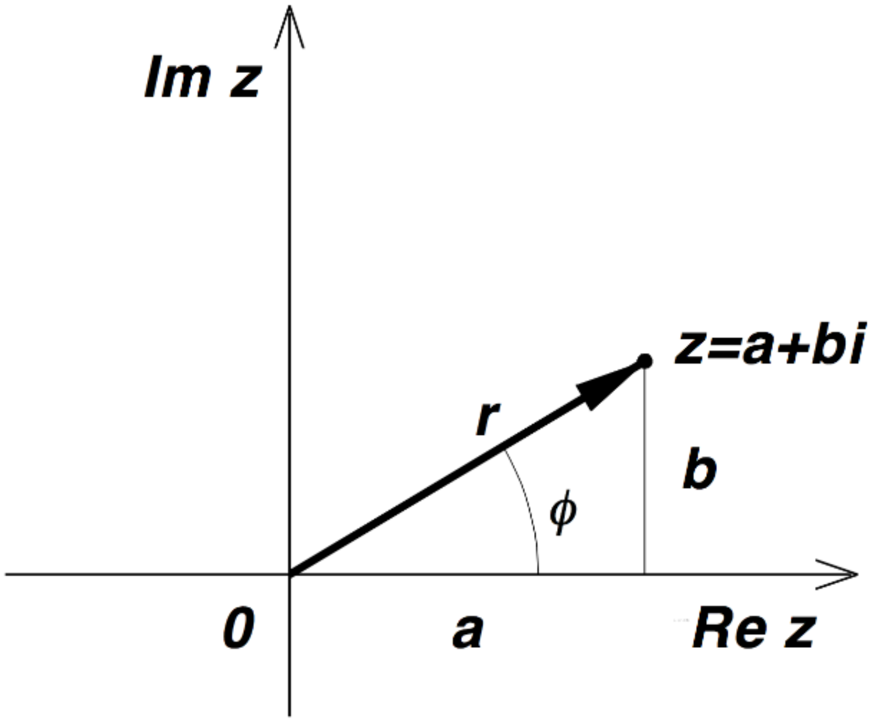
Seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

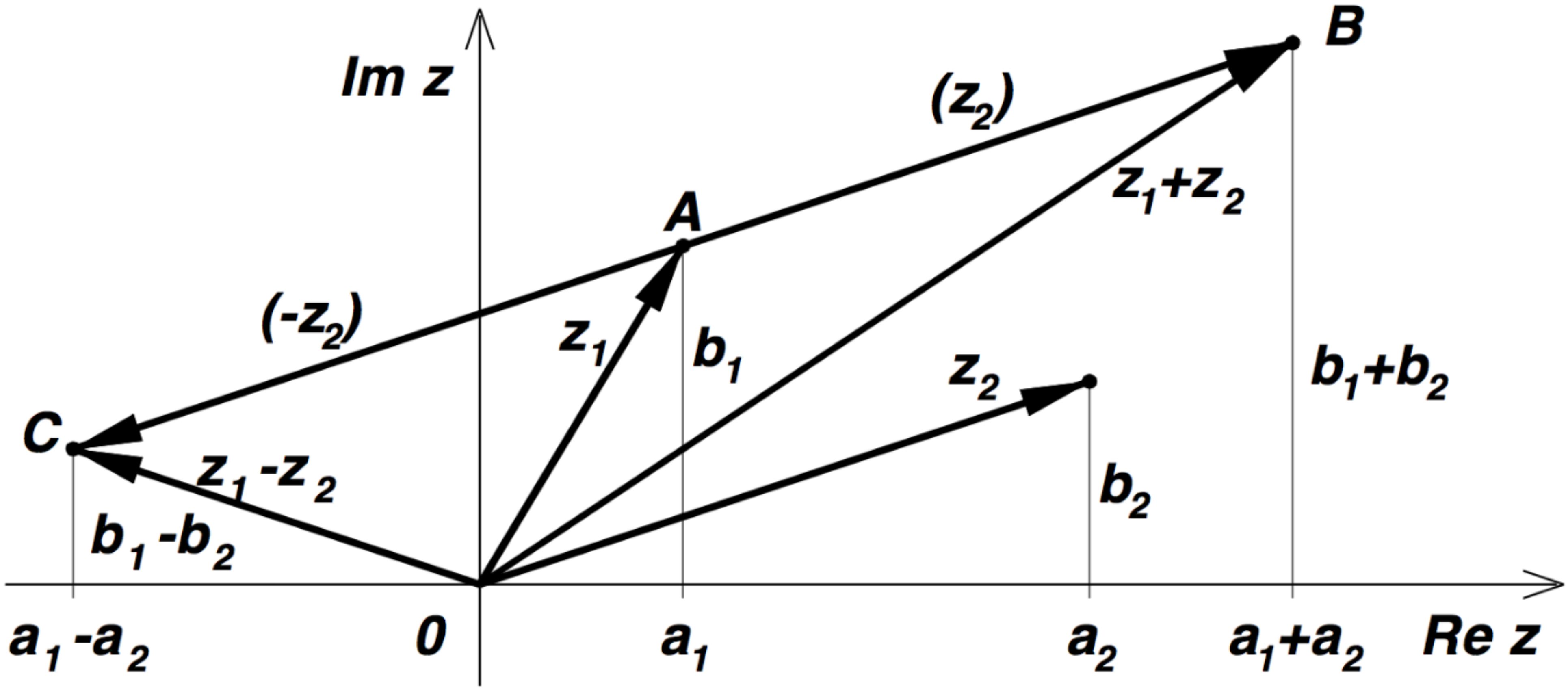
Gaußsche Zahlenebene

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

1. Führe in Ebene kartesisches Koordinatensystem (x, y) ein.
2. Trage $a = Re\ z$ auf der x-Achse auf.
3. Trage $b = Im\ z$ auf der y-Achse auf



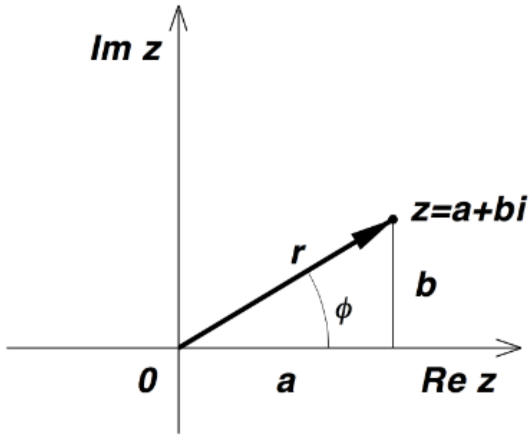
Addition/Subtraktion



Polarkoordinaten

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

1. Punkt in Zahlenebene charakterisiert durch (r, ϕ)
2. r absoluter Betrag von z (Abstand vom Ursprung/Länge)
3. ϕ Argument von z (Winkel zur x-Achse)



Bemerkungen:.

- ϕ nur bis auf Vielfache von π bestimmt: Betrachte $\phi \in]-\pi, \pi]$
- Es gilt: $a = r\cos\phi$ und $b = r\sin\phi$
- Umgekehrt gilt: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ und $\tan\phi = \frac{b}{a}$, $(a \neq 0)$
- Falls $a = 0$:
$$\phi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{falls } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{falls } b < 0 \end{cases}$$
- Falls $z = 0$, so ist $r = 0$ und ϕ unbestimmt

Rechenregeln in Polarkoordinaten

Allgemeine Darstellung in Polarkoordinaten:

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Seien $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ und $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$. Dann gilt:

- $z \cdot w = |z||w|(\cos(\phi + \psi) + i\sin(\phi + \psi))$
- $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\phi - \psi) + i\sin(\phi - \psi))$

(Addition: Übung)

Eulersche Formel

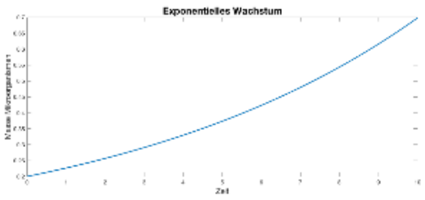
Sei $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$. Dann gilt:

$$z = |z|e^{i\phi}$$

mit der Eulerschen Formel $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$.

Funktionen: Motivation und Definition

Beispiel



Exponentielles Wachstum einer Kultur von Mikroorganismen (Beispiel):

$$w : [t_0, T] \to \mathbb{R}; \quad w(t) = c_0 \cdot e^{\alpha t},$$

mit Parametern c_0 und α.

w Abbildung! ①

Definition
Reelle Funktion einer Veränderlichen

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$.

$$f : D \to \mathbb{R}$$

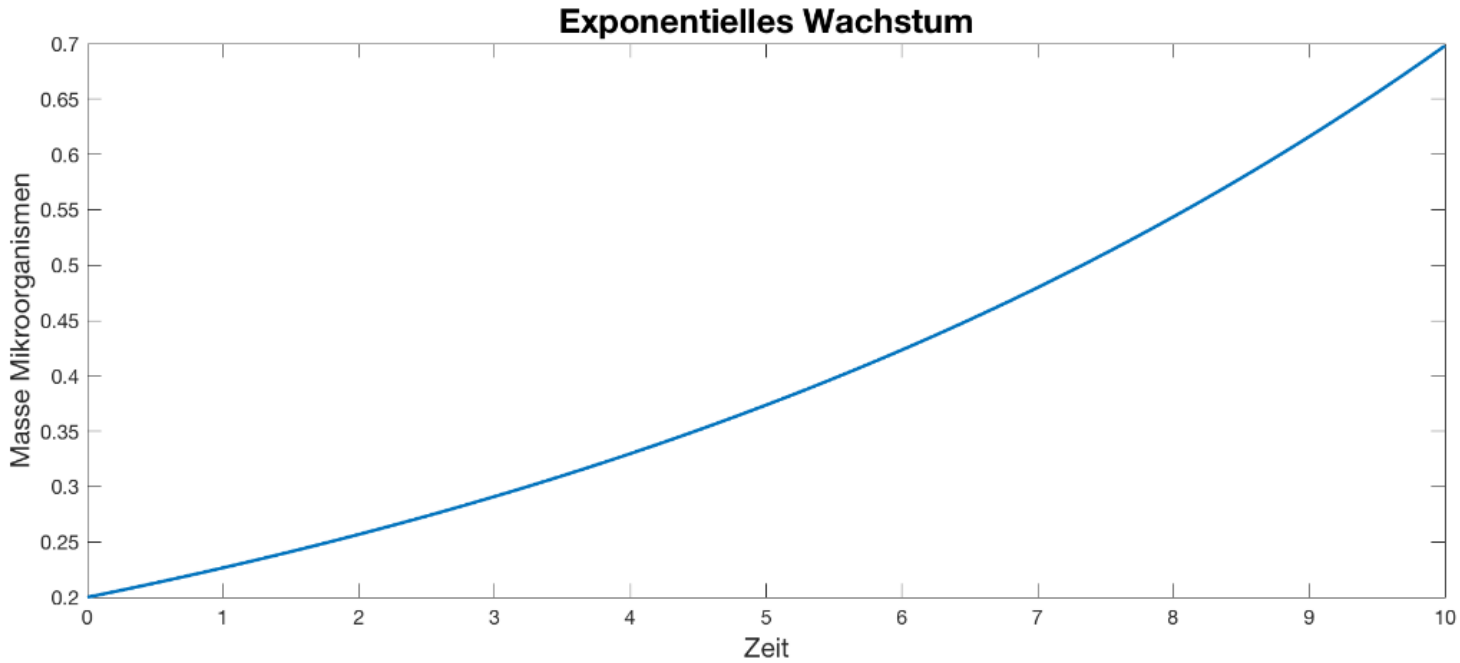
heißt *reellwertige Funktion* einer Veränderlichen. Schreibe

$$y = f(x)$$

mit $x \in D$ der unabhängigen Veränderlichen und y (dem Bild von x unter f) der abhängigen Veränderlichen.

- $D = D(f) \subset \mathbb{R}$ heißt *Definitionsbereich* der Funktion f.
- $W = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D \text{ mit } y = f(x)\}$ heißt *Wertebereich* von f.

Beispiel



Exponentielles Wachstum einer Kultur von Mikroorganismen (Beispiel):

$$w : [t_0, T] \to \mathbb{R}; \quad w(t) = c_0 \cdot e^{at},$$

mit Parametern c_0 und a.

w Abbildung! ①

Definition
Reelle Funktion einer Veränderlichen

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$.

$$f : D \to \mathbb{R}$$

heißt *reellwertige Funktion* einer Veränderlichen. Schreibe

$$y = f(x)$$

mit $x \in D$ der unabhängigen Veränderlichen und y (dem Bild von x unter f) der abhängigen Veränderlichen.

- $D = D(f) \subset \mathbb{R}$ heißt *Definitionsbereich* der Funktion f.
- $W = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D \text{ mit } y = f(x)\}$ heißt *Wertebereich* von f.

Weitere Begriffe

Erinnerung: Bildmenge/Urbildmenge

Annahmen:

- $D \subseteq \mathbb{R}$.
- $f : D \subseteq \mathbb{R} \to W \subseteq \mathbb{R}$.
- Also: f ordnet jedem $x \in D$ *genau ein* $y \in W$ zu, oder

$$f(a) \neq f(a') \Rightarrow a \neq a' \quad (a, a' \in D).$$

- Für $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ ist die *Bildmenge* von A

$$f(A) := \{y \in W : \exists x \in A \text{ mit } y = f(x)\}.$$

- Für $B \subseteq W \subseteq \mathbb{R}$ ist die *Urbildmenge* von B

$$f^{-1}(B) := \{x \in D : f(x) \in B\}$$

Erinnerung: Injektiv/Surjektiv/Bijektiv

Sei $f : A \to B$ eine Funktion.

- f heißt *injektiv*, falls für $a, a' \in A$ beliebig gilt

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a').$$

- f heißt *surjektiv*, falls es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ gibt, so dass

$$b = f(a).$$

- f heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

②

Gleichheit von Funktionen

Seien $f : D(f) \to \mathbb{R}$ und $g : D(g) \to \mathbb{R}$ Funktionen.
Dann sind f und g gleich ($f = g$) genau dann, wenn

- $D(f) = D(g)$ und
- für alle $x \in D(f)$ gilt: $f(x) = g(x)$.

Darstellung von Funktionen

Funktionen können durch *Tabellen ihrer Funktionswerte* dargestellt werden:

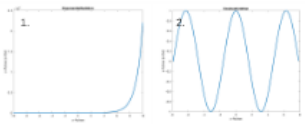
x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

$$f : \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \to \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\}$$

Funktionen können durch ihren *Graphen* dargestellt werden,
d.h. das kartesische *Produkt* $D \times f(D)$.
Genauer:

$$\text{Graph}(f) = \{(x, y) \in D \times f(D) : y = f(x)\} \subset D \times f(D).$$

Zwei Beispiele



1. $y = f(x) = e^x$, $D = \mathbb{R}$, $W = (0, \infty)$, injektiv, surjektiv, also bijektiv
2. $y = f(x) = \sin x$, $D = \mathbb{R}$, $W = [-1, 1]$, nicht injektiv, surjektiv

Erinnerung: Bildmenge/Urbildmenge

Annahmen:

- $D \subseteq \mathbb{R}$.
- $f : D \subset \mathbb{R} \to W \subset \mathbb{R}$.
- Also: f ordnet jedem $x \in D$ *genau ein* $y \in W$ zu, oder

$$f(a) \neq f(a') \Rightarrow a \neq a' \quad (a, a' \in D).$$

- Für $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ ist die *Bildmenge* von A

$$f(A) := \{y \in W : \exists x \in A \text{ mit } y = f(x)\}.$$

- Für $B \subseteq W \subseteq \mathbb{R}$ ist die *Urbildmenge* von B

$$f^{-1}(B) := \{x \in D : f(x) \in B\}$$

Erinnerung: Injektiv/Surjektiv/Bijektiv

Sei $f : A \to B$ eine Funktion

- f heißt *injektiv*, falls für $a, a' \in A$ beliebig gilt.

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a').$$

- f heißt *surjektiv*, falls es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ gibt, so dass

$$b = f(a).$$

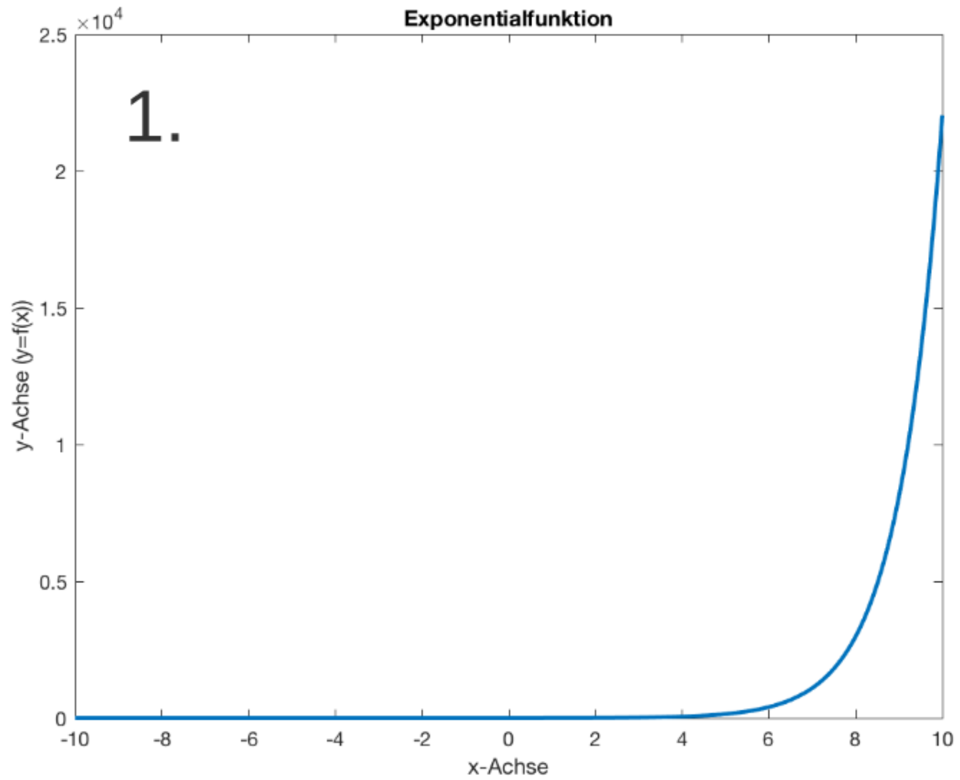
- f heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

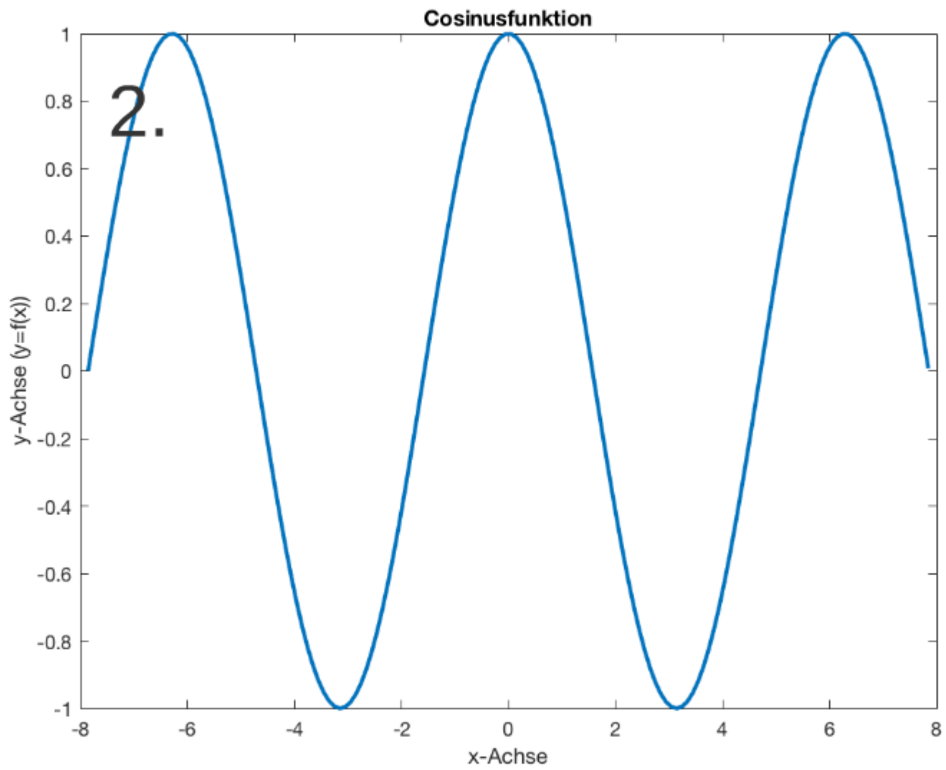
Gleichheit von Funktionen

Seien $f : D(f) \to \mathbb{R}$ und $g : D(g) \to \mathbb{R}$ Funktionen.
Dann sind f und g gleich ($f = g$) genau dann, wenn

- $D(f) = D(g)$ und
- für alle $x \in D(f)$ gilt: $f(x) = g(x)$.

Zwei Beispiele





1. $y = F(x) = e^x$, $D = \mathbb{R}$, $W =]0, \infty[$, injektiv, surjektiv, also bijektiv

2. $y = f(x) = \cos x$, $D = \mathbb{R}$, $W = [-1, 1]$, nicht injektiv, surjektiv.

Darstellung von Funktionen

Funktionen können durch *Tabellen* ihrer Funktionswerte dargestellt werden:

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

$$f : \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \to \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\}$$

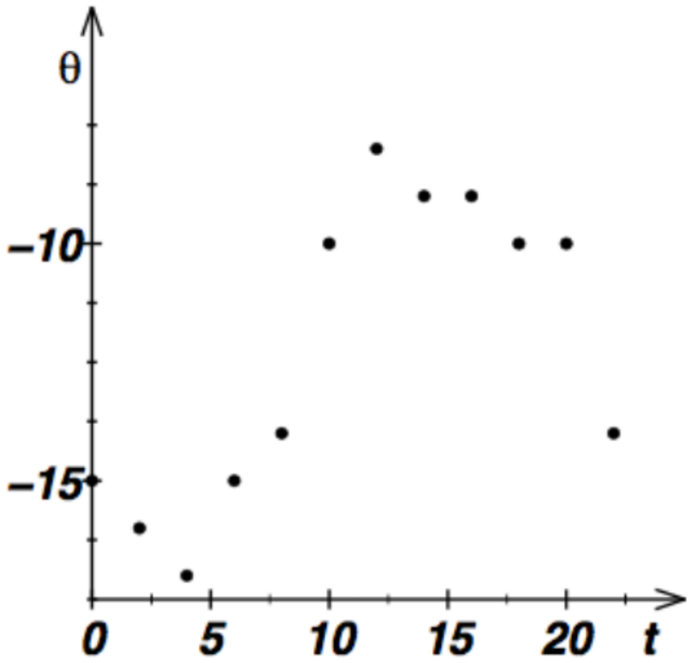
Funktionen können durch ihren *Graphen* dargestellt werden,
d.h. das *kartesische Produkt* $D \times f(D)$.
Genauer:

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, y) \in D \times f(D) : y = f(x)\} \subset D \times f(D).$$

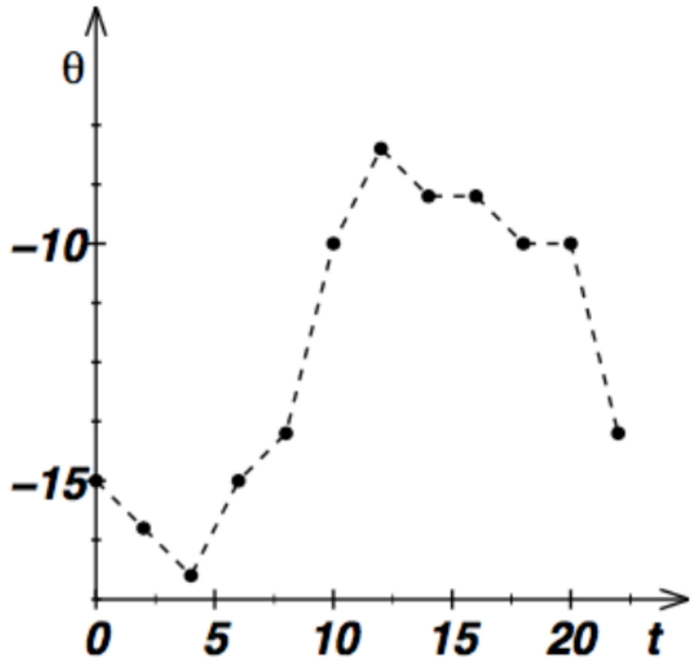
Beispiel: Temperatur in Berlin am 05.12.1998

Temperatur $\theta(t)$ in Grad Celsius ($^\circ C$) gemessen
zur Zeit t in Stunden nach $00:00$ Uhr.

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
θ	- 15	-16	-17	-15	-14	-10	-8	-9	-9	-10	-10	-14



Temperaturmessreihe (Graph)



Temperaturmessreihe
(linear interpoliert)

Umkehrfunktion

Definition

Sei $f : A \to B$ bijektive Funktion.

- Jedem $x \in A$ ist genau ein $y = f(x) \in B$ zugeordnet.
- Umgekehrt ist jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ zugeordnet.

Also existiert $f^{-1} : B \to A$ mit

$$f^{-1}(y) = x, \text{ falls } y = f(x).$$

f^{-1} heißt *Umkehrfunktion* (oder Umkehrabbildung oder inverse Funktion).

Bemerkungen

Sei $f : A \to B$ bijektive Funktion.

- $f^{-1} : B \to A$ ist dann auch bijektiv.
- Es gilt: $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in A$.
- $D(f^{-1}) = B$, $f^{-1}(B) = A$.

Berechnung der Umkehrfunktion

Beobachtung: in $x = f^{-1}(y)$ ist y die unabhängige Veränderliche und x die abhängige Veränderliche

$\Longrightarrow$ in (x, y)-Koordinatensystem werden

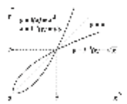
$$y = f(x) \text{ und } x = f^{-1}(y)$$

durch dieselbe Kurve dargestellt.

Algorithmus zur Berechnung der Umkehrfunktion:
Ist $f : A \to B$ bijektiv, so ergibt sich $f^{-1} : B \to A$ durch

1. $y = f(x)$ nach x auflösen ergibt: $x = f^{-1}(y)$
2. x und y vertauschen ergibt: $y = f^{-1}(x)$.

$y = f^{-1}(x)$ und $y = f(x)$ liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$.



③

Definition

Sei $f : A \to B$ bijektive Funktion.

- Jedem $x \in A$ ist genau ein $y = f(x) \in B$ zugeordnet.
- Umgekehrt ist jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ zugeordnet.

Also existiert $f^{-1} : B \to A$ mit

$$f^{-1}(y) = x, \text{ falls } y = f(x).$$

f^{-1} heißt *Umkehrfunktion* (oder Umkehrabbildung oder inverse Funktion).

Bemerkungen

Sei $f : A \to B$ bijektive Funktion.

- $f^{-1} : B \to A$ ist dann auch bijektiv.
- Es gilt: $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in A$.
- $D(f^{-1}) = B$, $f^{-1}(B) = A$.

Berechnung der Umkehrfunktion

Beobachtung: in $x = f^{-1}(y)$ ist y die unabhängige Veränderliche und x die abhängige Veränderliche

$\Longrightarrow$ in (x, y)-Koordinatensystem werden

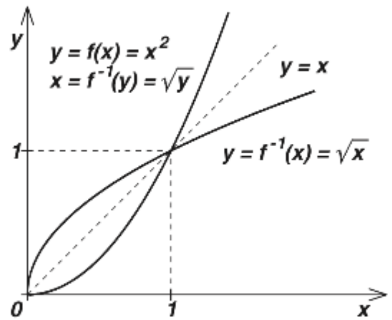
$$y = f(x) \text{ und } x = f^{-1}(y)$$

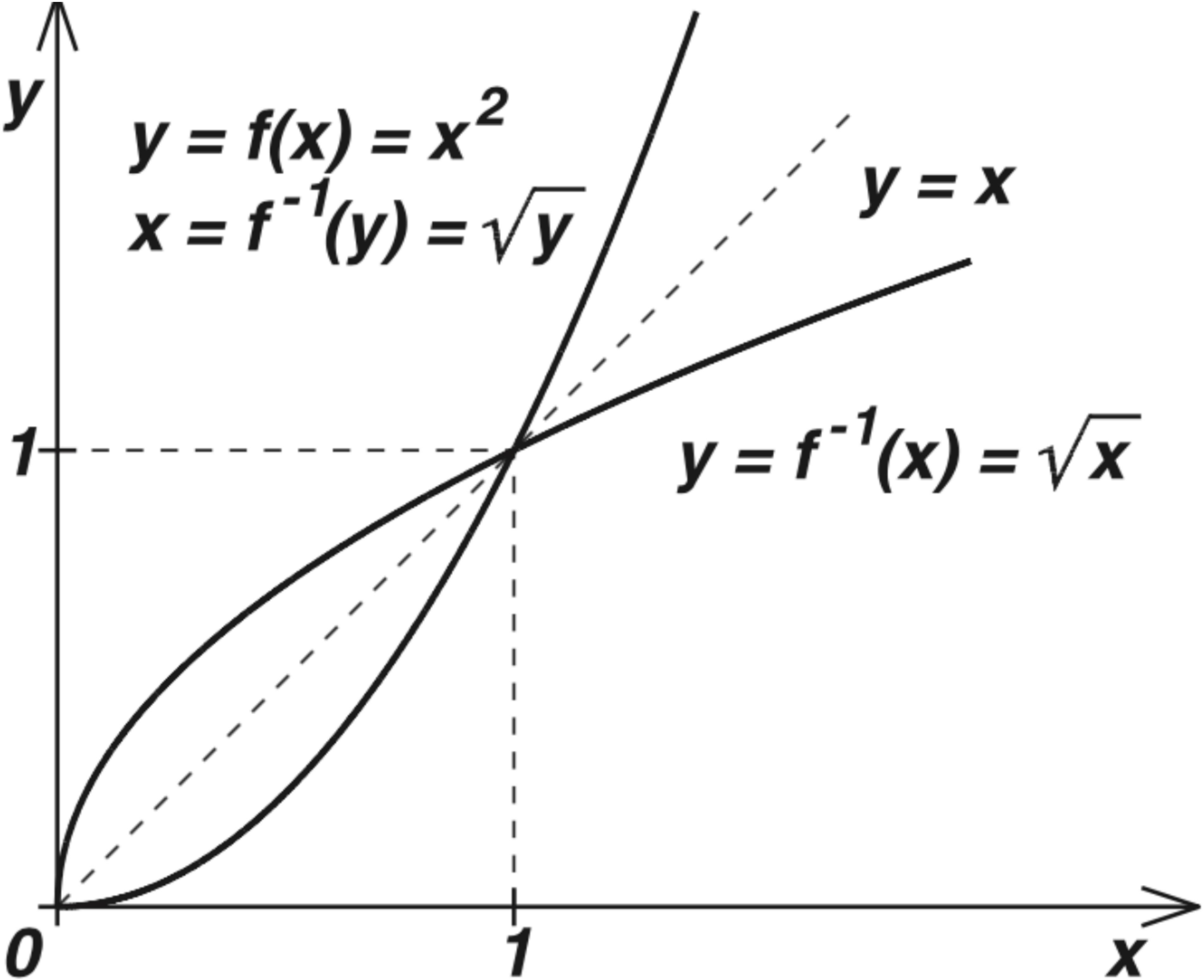
durch dieselbe Kurve dargestellt.

Algorithmus zur Berechnung der Umkehrfunktion:
Ist $f : A \to B$ bijektiv, so ergibt sich $f^{-1} : B \to A$ durch

1. $y = f(x)$ nach x auflösen ergibt: $x = f^{-1}(y)$
2. x und y vertauschen ergibt: $y = f^{-1}(x)$.

$y = f^{-1}(x)$ und $y = f(x)$ liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$.





y
$y = f(x) = x^2$
$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$
$y = x$
1
$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
0
1
x

Verkettete Funktionen

Definition

Seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ mit $B \subset C$.
Dann ist zu $x \in A$ durch f das Element $f(x) \in B$ zugeordnet, und $f(x)$ durch g das Element $g(f(x)) \in D$ zugeordnet.
Das Nacheinanderausführen von f und g liefert

$$h = g \circ f : A \to D.$$

$h = g \circ f$ heißt zusammengesetzte oder *verkettete Funktion*.

Beispiele und Bemerkung

1. $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$, damit: $h(x) = g \circ f(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$.
2. $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$, damit: $\bar{h}(x) = f \circ g(x) = e^{x^2}$.
3. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt(x)$, damit: $\bar{h}(x) = f \circ g(x) = |x|$.

Bemerkung: Aus 1. und 2. ist ersichtlich: Im Allgemeinen

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

④

Definition

Seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ mit $B \subset C$.
Dann ist zu $x \in A$ durch f das Element $f(x) \in B$ zugeordnet, und $f(x)$ durch g das Element $g(f(x)) \in D$ zugeordnet.
Das Nacheinanderausführen von f und g liefert

$$h = g \circ f : A \to D.$$

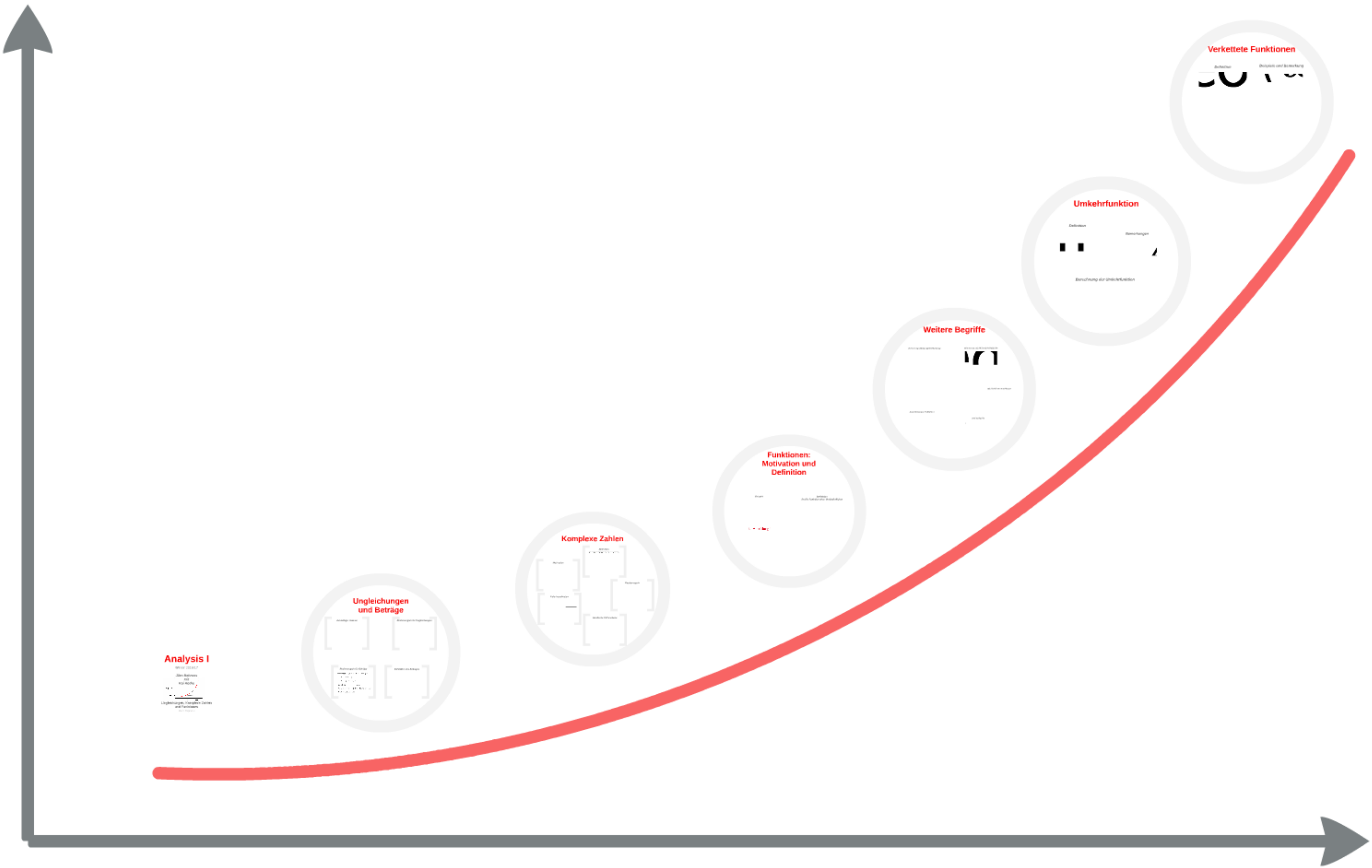
$h = g \circ f$ heißt zusammengesetzte oder *verkettete Funktion*.

Beispiele und Bemerkung

1. $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$, damit: $h(x) = g \circ f(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$.
2. $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$, damit: $\tilde{h}(x) = f \circ g(x) = e^{x^2}$.
3. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{(}x)$, damit: $\bar{h}(x) = f \circ g(x) = |x|$.

Bemerkung: Aus 1. und 2. ist ersichtlich: Im Allgemeinen

$$f \circ g \neq g \circ f.$$


Analysis I
Ungleichungen und Beträge
Komplexe Zahlen
Funktionen: Motivation und Definition
Weitere Begriffe
Umkehrfunktion
Verkettete Funktionen