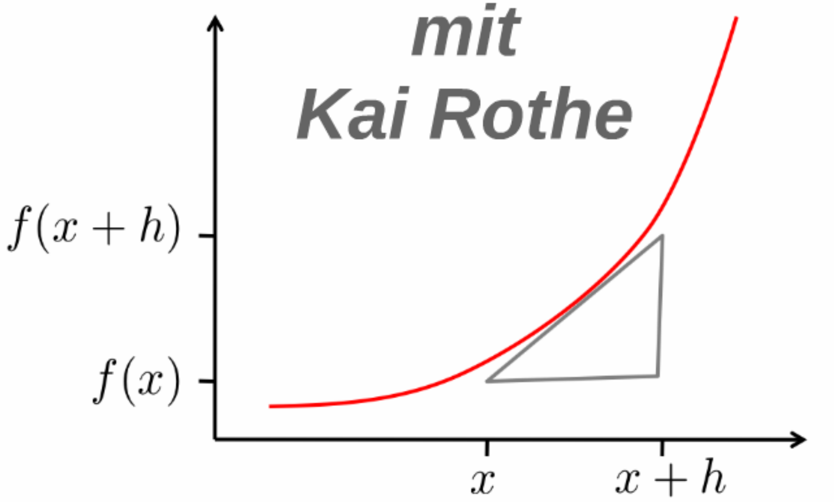
Analysis I

Winter 2020/21

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe



Eigenschaften von Funktionen

Buch Kapitel 2

Erinnerung

Funktion

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$.

$$f : D \to \mathbb{R}$$

heißt *reellwertige Funktion* einer Veränderlichen. Schreibe

$$y = f(x)$$

mit $x \in D$ der unabhängigen Veränderlichen und y (dem Bild von x unter f) der abhängigen Veränderlichen.

Gleichheit

Seien $f : D(f) \to \mathbb{R}$ und $g : D(g) \to \mathbb{R}$ Funktionen.
Dann sind f und g gleich ($f = g$) genau dann, wenn

- $D(f) = D(g)$ und
- für alle $x \in D(f)$ gilt: $f(x) = g(x)$.

Umkehrfunktion

Sei $f : A \to B$ bijektive Funktion.

- Jedem $x \in A$ ist genau ein $y = f(x) \in B$ zugeordnet.
- Umgekehrt ist jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ zugeordnet.

Also existiert $f^{-1} : B \to A$ mit

$$f^{-1}(y) = x, \text{ falls } y = f(x).$$

f^{-1} heißt *Umkehrfunktion* (oder Umkehrabbildung oder inverse Funktion).

Verkettete Funktionen

Seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ mit $B \subset C$.
Dann ist zu $x \in A$ durch f das Element $f(x) \in B$ zugeordnet, und $f(x)$ durch g das Element $g(f(x)) \in D$ zugeordnet.
Das Nacheinanderausführen von f und g liefert

$$h = g \circ f : A \to D.$$

$h = g \circ f$ heißt zusammengesetzte oder *verkettete Funktion*.

ne

$, a_0, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$;

ffizienten des Polynoms.

De

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion.

- f heißt auf $M \subset D$ …
- f heißt auf M nach … existiert, so dass
- f heißt auf M nach … existiert, so dass

Funktion

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$.

$$f : D \to \mathbb{R}$$

heißt *reellwertige Funktion* einer Veränderlichen. Schreibe

$$y = f(x)$$

mit $x \in D$ der unabhängigen Veränderlichen und y (dem Bild von x unter f) der abhängigen Veränderlichen.

Gleichheit

Seien $f : D(f) \to \mathbb{R}$ und $g : D(g) \to \mathbb{R}$ Funktionen.
Dann sind f und g gleich ($f = g$) genau dann, wenn

- $D(f) = D(g)$ und
- für alle $x \in D(f)$ gilt: $f(x) = g(x)$.

Umkehrfunktion

Sei $f : A \to B$ bijektive Funktion.

- Jedem $x \in A$ ist genau ein $y = f(x) \in B$ zugeordnet.
- Umgekehrt ist jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ zugeordnet.

Also existiert $f^{-1} : B \to A$ mit

$$f^{-1}(y) = x, \text{ falls } y = f(x).$$

f^{-1} heißt *Umkehrfunktion* (oder Umkehrabbildung oder inverse Funktion).

Verkettete Funktionen

Seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ mit $B \subset C$.
Dann ist zu $x \in A$ durch f das Element $f(x) \in B$ zugeordnet, und $f(x)$ durch g das Element $g(f(x)) \in D$ zugeordnet.
Das Nacheinanderausführen von f und g liefert

$$h = g \circ f : A \to D.$$

$h = g \circ f$ heißt zusammengesetzte oder *verkettete Funktion*.

ktion

B zugeordnet.

$\in A$ zugeordnet.

$= f(x)$.

dung oder inverse Funktion).

Beschränkte Funktionen

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion.

- f heißt auf $M \subset D$ *beschränkt*, falls $c \in \mathbb{R}$, $0 < c < \infty$ existiert, so dass
$$|f(x)| \le c \quad \forall\, x \in M.$$
- f heißt auf M *nach oben beschränkt*, falls obere Schranke $b_o \in \mathbb{R}$, $b_o < \infty$ existiert, so dass
$$f(x) \le b_o \quad \forall\, x \in M.$$
- f heißt auf M *nach unten beschränkt*, falls untere Schranke $b_u \in \mathbb{R}$, $b_u > -\infty$ existiert, so dass
$$f(x) \ge b_u \quad \forall\, x \in M.$$

1

Supremum/Infimum

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion.

- Sei f nach oben beschränkt. Die kleinste obere Schranke von f heißt *Supremum* von f: $\sup_{x\in D} f(x)$.
- Sei f nach unten beschränkt. Die größte untere Schranke von f heißt *Infimum* von f: $\inf_{x\in D} f(x)$.

Unter den Bedingungen an f existieren $\sup f$ und $\inf f$ in $\mathbb{R}$ und sind eindeutig!

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion.

- f heißt auf $M \subset D$ *beschränkt*, falls $c \in \mathbb{R}$, $0 < c < \infty$ existiert, so dass
$$|f(x)| \leq c \quad \forall\, x \in M.$$

- f heißt auf M *nach oben beschränkt*, falls obere Schranke $b_o \in \mathbb{R}$, $b_o < \infty$ existiert, so dass
$$f(x) \leq b_o \quad \forall\, x \in M.$$

- f heißt auf M *nach unten beschränkt*, falls untere Schranke $b_u \in \mathbb{R}$, $b_u > -\infty$ existiert, so dass
$$f(x) \geq b_u \quad \forall\, x \in M.$$

Supremum/Infimum

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion.

- Sei f nach oben beschränkt. Die kleinste obere Schranke von f heißt *Supremum* von f: $\sup_{x \in D} f(x)$.
- Sei f nach unten beschränkt. Die größte untere Schranke von f heißt *Infimum* von f: $\inf_{x \in D} f(x)$.

Unter den Bedingungen an f existieren $\sup f$ und $\inf f$ in $\mathbb{R}$ und sind eindeutig!

Monotonie
Konvexität

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ Funktion, $I \subset D$ Intervall.

- f heißt *monoton steigend* falls für $x, y \in I$ gilt:

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

- Falls sogar gilt $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, so heißt f *streng monoton steigend.*
- Umgekehrt heißt f *monoton fallend* falls für $x, y \in I$ gilt:

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

- Falls sogar gilt $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, so heißt f *streng monoton fallend.*

②

Konvex/Konkav

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ Funktion, $I \subset D$ Intervall.

- f heißt auf I *konvex von unten* falls für beliebige $x, y \in I$, $x \neq y$ und $\alpha \in [0,1]$ gilt:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

- f heißt auf I *konkav von unten* falls für beliebige $x, y \in I$, $x \neq y$ und $\alpha \in [0,1]$ gilt:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Gilt in den Ungleichungen $<$ bzw. $>$ für $\alpha \in]0,1[$, so heißt f *streng konvex* bzw. *streng konkav* auf I.

③

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ y = f(x)$ Funktion, $I \subset D$ Intervall.

- f heißt *monoton steigend* falls für $x, y \in I$ gilt:

$$x < y \ \Rightarrow \ f(x) \leq f(y).$$

- Falls sogar gilt $x < y \ \Rightarrow \ f(x) < f(y)$, so heißt f *streng monoton steigend*.
- Umgekehrt heißt f *monoton fallend* falls für $x, y \in I$ gilt:

$$x < y \ \Rightarrow \ f(x) \geq f(y).$$

- Falls sogar gilt $x < y \ \Rightarrow \ f(x) > f(y)$, so heißt f *streng monoton fallend*.

Konvex/Konkav

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ y = f(x)$ Funktion, $I \subset D$ Intervall.

- f heißt auf I *konvex von unten* falls für beliebige $x, y \in I$, $x \neq y$ und $\alpha \in [0,1]$ gilt:

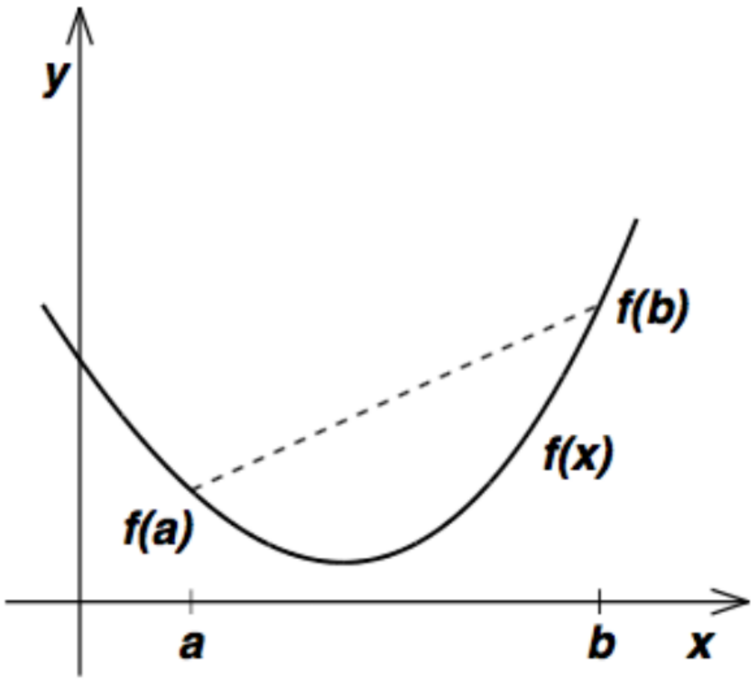
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

- f heißt auf I *konkav von unten* falls für beliebige $x, y \in I$, $x \neq y$ und $\alpha \in [0,1]$ gilt:

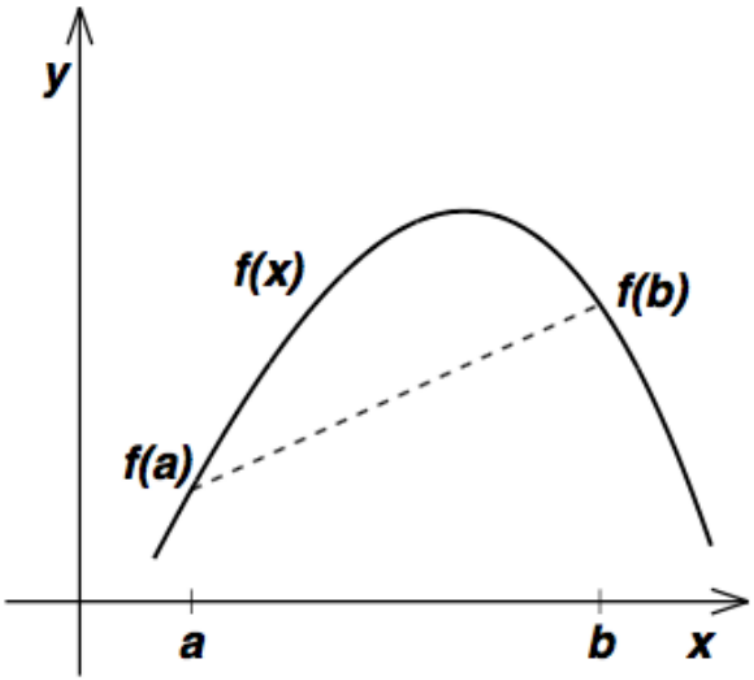
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Gilt in den Ungleichungen $<$ bzw. $>$ für $\alpha \in]0,1[$, so heißt f *streng konvex* bzw. *streng konkav* auf I.

Geometrisch: Konvex und Konkav



$f(x)$ streng konvex von unten



$f(x)$ streng konkav von unten

Gerade/Ungerade Funktionen

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ Funktion, D symmetrisch bezüglich $x = 0$.

- f heißt *gerade*, falls für alle $x \in D$ gilt:
$$f(x) = f(-x).$$
- f heißt *ungerade*, falls für alle $x \in D$ gilt:
$$f(x) = -f(-x).$$

Bemerkungen

Bemerkung.

- Der Graph einer geraden Funktion ist symmetrisch bzgl. der y-Achse.
- Der Graph einer ungeraden Funktion für $x < 0$ geht durch Drehung um 180° aus dem Graphen für $x > 0$ hervor.

Bemerkung: Jede Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit um $x = 0$ symmetrischem D kann als Summe einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion u dargestellt werden:

$$f(x) = g(x) + u(x)$$

④

Beispiele

- $y = \cos x$ ist gerade
- $y = |x|$ ist gerade
- $y = x^3$ ist ungerade

Stelle $y = e^x = f(x)$ als Summe aus $u(x)$ und $g(x)$ dar:

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ y = f(x)$ Funktion, D symmetrisch bezüglich $x = 0$.

$D \subseteq \mathbb{R}$ symmetrisch bzgl. $x = 0$:
$x \in D \Rightarrow -x \in D$.

- f heißt *gerade*, falls für alle $x \in D$ gilt:

$$f(x) = f(-x).$$

- f heißt *ungerade*, falls für alle $x \in D$ gilt:

$$f(x) = -f(-x).$$

$D \subset \mathbb{R}$ symmetrisch bzgl. $x = 0$:
$x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ y = f(x)$ Funktion, D symmetrisch bezüglich $x = 0$.

$D \subseteq \mathbb{R}$ symmetrisch bzgl. $x = 0$:
$x \in D \Rightarrow -x \in D$.

- f heißt *gerade*, falls für alle $x \in D$ gilt:

$$f(x) = f(-x).$$

- f heißt *ungerade*, falls für alle $x \in D$ gilt:

$$f(x) = -f(-x).$$

Bemerkungen

Bemerkung:

- Der Graph einer geraden Funktion ist symmetrisch bzgl. der y-Achse.
- Der Graph einer ungeraden Funktion für $x < 0$ geht durch Drehung um $180^{\deg}$ aus dem Graphen für $x > 0$ hervor.

Bemerkung: Jede Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit um $x = 0$ symmetrischem D kann als Summe einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion u dargestellt werden:

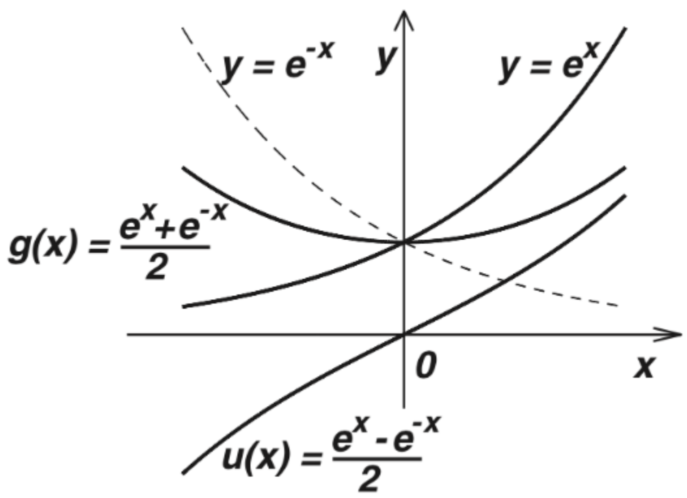
$$f(x) = g(x) + u(x)$$

④

Beispiele

- $y = \cos x$ ist gerade
- $y = |x|$ ist gerade
- $y = x^3$ ist ungerade

Stelle $y = e^x = f(x)$ als Summe aus $u(x)$ und $g(x)$ dar:



Periodische Funktion

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion. f heißt *periodisch*, falls $\alpha > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ auch $x + \alpha \in D$, und

$$f(x+\alpha) = f(x).$$

α heißt *Periode* von f. Die kleinste Periode von f, $\alpha_{\min} = \min\{\alpha\}$ heißt *primitive Periode*.

Beispiel

- $y = \cos x$ ist periodisch mit Perioden $2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.
- $y = \sin x$ ist periodisch mit Perioden $2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

Die primitiven Perioden für beide Funktionen lautet 2π.

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion. f heißt *periodisch*, falls $\alpha > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ auch $x + \alpha \in D$, und

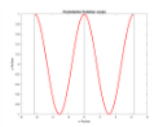
$$f(x + \alpha) = f(x).$$

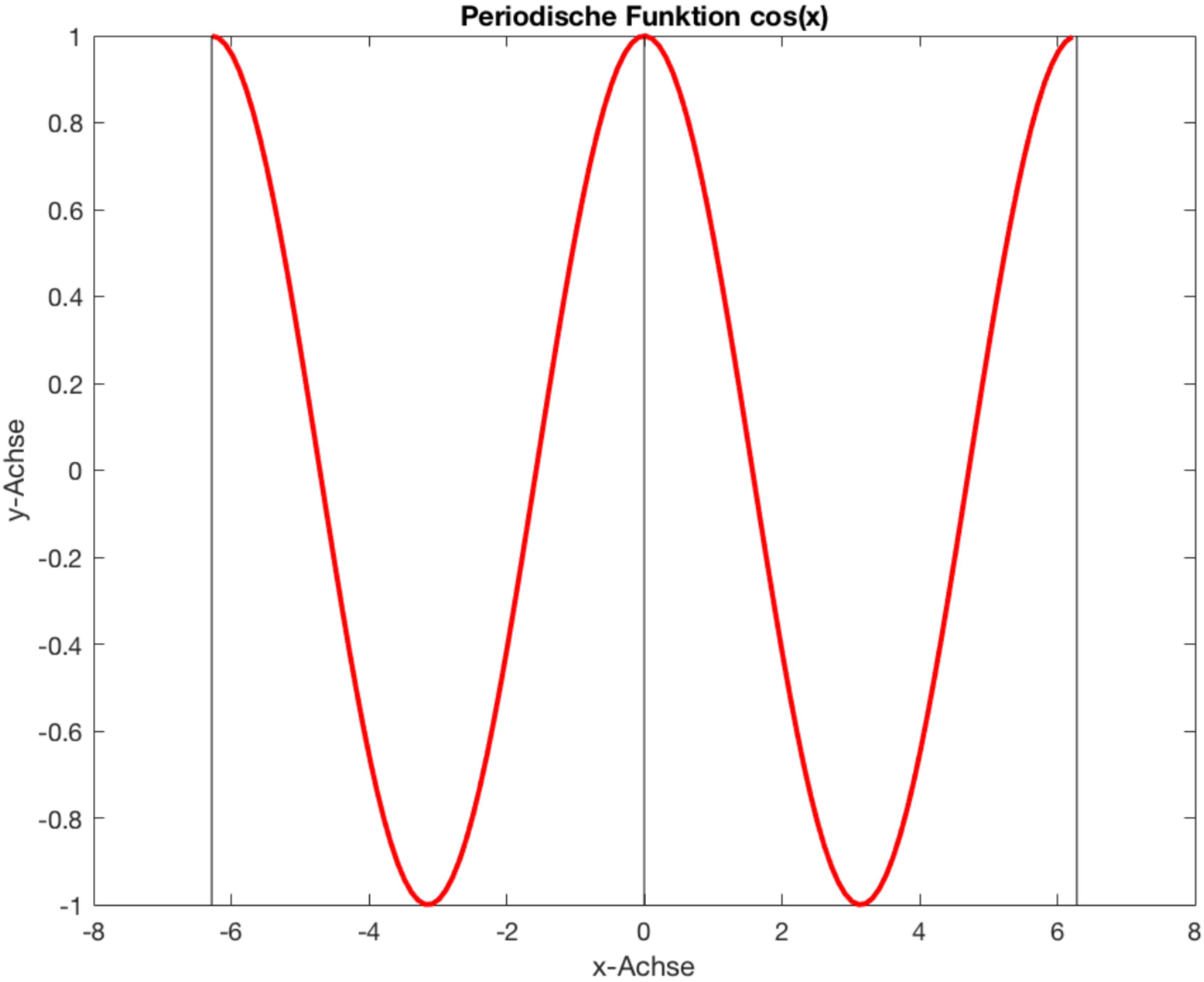
α heißt *Periode* von f. Die kleinste Periode von f, $\alpha_{\min} = \min\{\alpha\}$ heißt *primitive Periode*.

Beispiel

- $y = \cos x$ ist periodisch mit Perioden $2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.
- $y = \sin x$ ist periodisch mit Perioden $2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

Die primitiven Perioden für beide Funktionen lautet 2π.



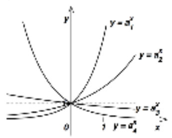


Periodische Funktion cos(x)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
y-Achse
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x-Achse

Grundfunktionen

Exponentialfunktion

- $f(x) = y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$, $D = \mathbb{R}$ heißt *Exponentialfunktion*.
- Falls $a = e \approx 2{,}71828\ldots$ die *Eulersche Zahl*, nennen wir f *e-Funktion*.



Bemerkung: Die Exponentialfunktion wird erneut Thema, wenn Reihen und Grenzwerte eingeführt werden.

Logarithmusfunktion

- $f(x) = y = \log_a x$, $a \neq 1$, $a > 0$, $D = \mathbb{R}_{>0}$ heißt *Logarithmusfunktion*. Definiert als die Zahl y mit

$$a^y = x.$$

- Falls $a = e$, definiert man den *natürlichen Logarithmus*:

$$y = \ln x = \log_e x.$$

Potenzfunktion

$f(x) = y = x^\nu$:

- $\nu \in \mathbb{N}$: natürlicher Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ (größtmöglich).
- $\nu \in \mathbb{Z}$, $\nu < 0$: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $\nu \in \mathbb{R}$: $y = x^\nu := e^{\ln x^\nu} = e^{\nu \ln x}$, daher $D = \mathbb{R}_{>0}$.

Umkehrfunktion: Zu $y = x^\nu$ ($\nu \neq 0$) ist die Umkehrfunktion gegeben durch

$$y = x^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{x}$$

und damit wieder Potenzfunktion.

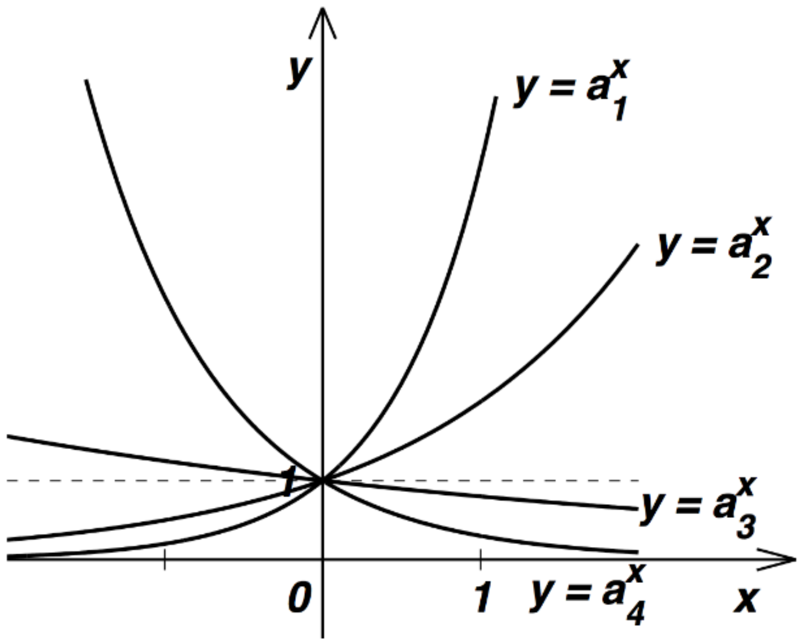
Trigonometrische Funktionen

- $f(x) = y = \sin x$, $f(x) = y = \cos x$, $D = \mathbb{R}$ primitive Periode 2π.
- $f(x) = y = \tan x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, primitive Periode π.
- $f(x) = y = \cot x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, primitive Periode π.

Periodi

Exponentialfunktion

- $f(x) = y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$, $D = \mathbb{R}$ heißt *Exponentialfunktion*.
- Falls $a = e \approx 2,71828\ldots$ die *Eulersche Zahl*, nennen wir f e-*Funktion*.



Bemerkung: Die Exponentialfunktion wird erneut Thema, wenn Reihen und Grenzwerte eingeführt werden.

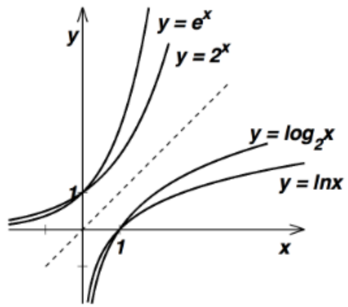
Logarithmusfunktion

- $f(x) = y = \log_a x,\ a \neq 1,\ a > 0,\ D = \mathbb{R}_{>0}$ heißt *Logarithmusfunktion*. Definiert als die Zahl y mit
$$a^y = x.$$

- Falls $a = e$ definiert man den *natürlichen Logarithmus*:
$$y = \ln x := \log_e x.$$

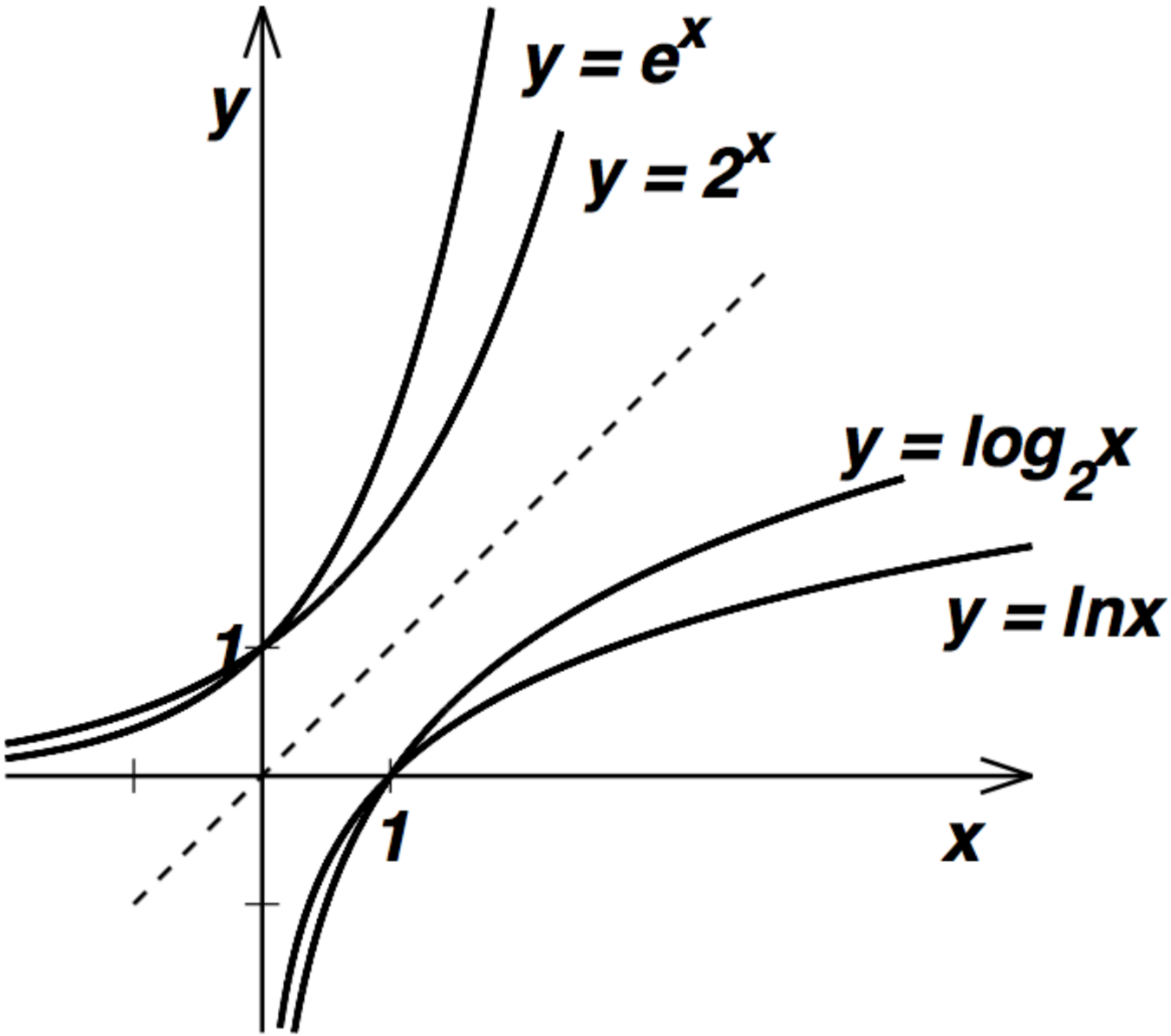
Bemerkungen: Es gelten folgende Gesetze (wg. Zusammenhang mit Exponentialfunktion) für $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$
- $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y.$
- $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x.$



Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

5



Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

Potenzfunktion

$f(x) = y = x^\nu$:

- $\nu \in \mathbb{N}$: natürlicher Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ (größtmöglich).
- $\nu \in \mathbb{Z}$, $\nu < 0$: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $\nu \in \mathbb{R}$: $y = x^\nu := e^{\ln x^\nu} = e^{\nu \ln x}$, daher $D = \mathbb{R}_{>0}$.

Umkehrfunktion: Zu $y = x^\nu$ $(\nu \neq 0)$ ist die Umkehrfunktion gegeben durch

$$y = x^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{x}$$

und damit wieder Potenzfunktion.

Trigonometrische Funktionen

- $f(x) = y = \sin x$, $f(x) = y = \cos x$, $D = \mathbb{R}$ primitive Periode 2π.
- $f(x) = y = \tan x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, primitive Periode π.
- $f(x) = y = \cot x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, primitive Periode π.

Beziehungen: Es gelten:

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

Inverse Trigonometrische Funktionen:

- Zu $\sin, \cos$: $f(x) = y = \arcsin x$, bzw. $f(x) = y = \arccos x$, $D = [-1, 1]$.
- Zu $\tan, \cot$: $f(x) = y = \arctan x$, bzw. $f(x) = y = \operatorname{arccot} x$, $D = \mathbb{R}$.

Beziehungen: Es gelten:

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, primitive Periode π.

Inverse Trigonometrische Funktionen:

- Zu $\sin, \cos$: $f(x) = y = \arcsin x$, bzw. $f(x) = y = \arccos x$, $D = [-1, 1]$.
- Zu $\tan, \cot$: $f(x) = y = \arctan x$, bzw. $f(x) = y = \mathrm{arccot}\ x$, $D = \mathbb{R}$.

abhängigen Veränderlichen.

Elementare Funktionen

Einführung

Elementare Funktionen:
Funktionen, die sich in einer geschlossenen analytischen Formel als Verknüpfung der Grundfunktionen darstellen lassen, heißen *elementare Funktionen*.

Polynome

Polynome (ganz rationale Funktionen):

$$f(x) = y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_n \neq 0,\ a_k, x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N};$$

n heißt *Grad*, a_k, $k = 1, \ldots, n$ $(k = 1:n)$ *Koeffizienten* des Polynoms.

Hyperbelfunktionen

- $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$, ungerade.
- $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $D = \mathbb{R}$, $W = [1, \infty[$, gerade.
- $\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $D = \mathbb{R}$, $W =]-1, 1[$, ungerade.
- $\coth x := \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $W = [-1, 1]$, ungerade.

Gebrochen-Rationale Funktionen

Polynombrüche (gebrochen rationale Funktionen):

$$f(x) = y = \frac{p_n(x)}{q_m(x)},$$

mit den Polynomen $p_n(x)$ und $q_m(x)$ mit dem Grad n bzw. m.
Ist $n < m$, heißt f *echt gebrochen* rationale Funktion,
ist $n \geq m$, heißt f *unecht gebrochen* rationale Funktion.

Einführung

Elementare Funktionen:
Funktionen, die sich in einer geschlossenen analytischen Formel als Verknüpfung der Grundfunktionen darstellen lassen, heißen *elementare Funktionen*.

Polynome

Polynome (ganz rationale Funktionen):

$$f(x) = y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_n \neq 0,\ a_k, x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N};$$

n heißt *Grad*, a_k, $k = 1, \ldots, n$ $(k = 1 : n)$ *Koeffizienten* des Polynoms.

Gebrochen-Rationale Funktionen

Polynombrüche (gebrochen rationale Funktionen):

$$f(x) = y = \frac{p_n(x)}{q_m(x)},$$

mit den Polynomen $p_n(x)$ und $q_m(x)$ mit dem Grad n bzw. m.
Ist $n < m$, heißt f *echt gebrochen* rationale Funktion,
ist $n \geq m$, heißt f *unecht gebrochen* rationale Funktion.

Hyperbelfunktionen

- $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$, ungerade.
- $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $D = \mathbb{R}$, $W = [1, \infty[$, gerade.
- $\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $D = \mathbb{R}$, $W =]-1, 1[$, ungerade.
- $\coth x := \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $W = [-1, 1]$, ungerade.

Analysis I

Winter 2020/21

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Eigenschaften von Funktionen

Buch Kapitel 2

Erinnerung

Gleichheit

Funktion

Umkehrfunktion

Verkettete Funktionen

Beschränkte Funktionen

Definition

Supremum/Infimum

Monotonie Konvexität

Definition

Konvex/Konkav

Gerade/Ungerade Funktionen

Definition

Bemerkungen

Beispiele

Periodische Funktion

Definition

Beispiel

Grundfunktionen

Exponentialfunktion

Logarithmusfunktion

Potenzfunktion

Trigonometrische Funktionen

Elementare Funktionen

Einführung

Polynome

Hyperbelfunktionen

Gebrochen-Rationale Funktionen