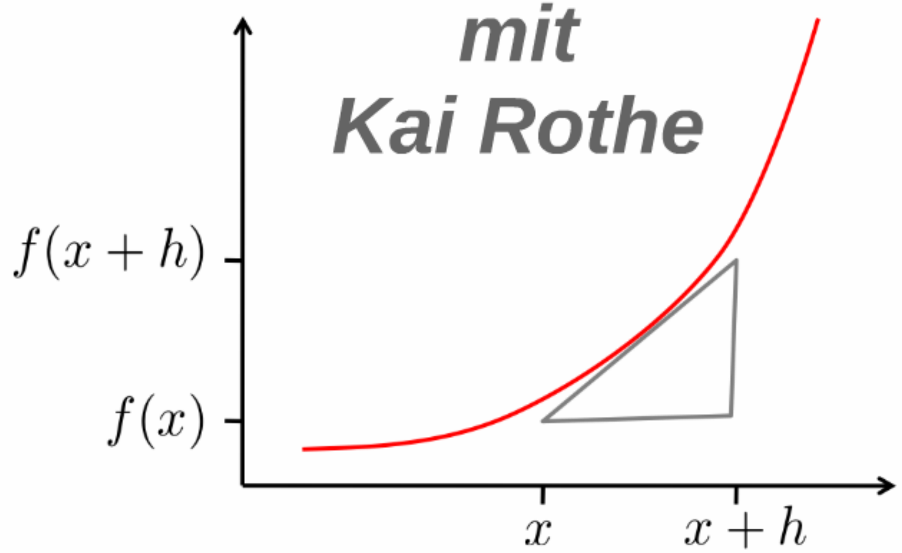
Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe



Grenzwerte

Buch Kapitel 2.4

Motivation

Nullstellen

Häufige Problemstellung: Finde $x \in I$, so dass

$$f(x) = 0,$$

wobei

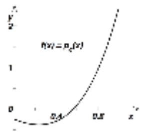
- $f : I \to \mathbb{R}$,
- $I = [a, b] \in \mathbb{R}$.

Definition: Diejenigen $x \in I$ mit $f(x) = 0$ nennt man Nullstellen.

Beispiel

Polynom: Folgende Gleichung ergibt sich aus Standfestigkeitsberechnung:

$$p_4(x) = x^4 + x^3 + 1.662 \cdot x^2 - x - 0.25 = 0.$$



Gesucht: Lösungen im Intervall $I = [0, 1]$.

Lösbarkeit:

- In $\mathbb{C}$ ist die Gleichung immer lösbar (Fundamentalsatz der Algebra).
- In $\mathbb{R}$ nicht garantiert, also Versuch einer Näherung:
  - Betrachte Intervalgrenzen: $p_4(0) = -0.25 < 0$, und $p_4(1) = 2.412 > 0$.
  - Wenn Funktion *ununterbrochen*, dann muss $p_4(x) = 0$ existieren.
  - Idee: Halbiere das Intervall und suche weiter.

Algorithmus

Intervallhalbierungsverfahren: Ist $f : I \to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, stetig (noch zu definieren), und gilt $\operatorname{sign}(f(a)) \neq \operatorname{sign}(f(b))$, so kann man mit folgenden Schritten eine Nullstelle von f approximieren:
Sei $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ und sei $\epsilon > 0$ eine Toleranz.

1. Halbiere das Intervall: $c = \frac{a+b}{2}$.
2. Berechne $f(c)$.
   - Falls $|f(c)| < \epsilon$, so ist die gesuchte Nullstelle gefunden. ENDE.
   - Falls $|f(c)| > \epsilon$, dann setze:

   $$\begin{cases} a \leftarrow a, b \leftarrow c, & \text{falls } f(c) > 0, \\ a \leftarrow c, b \leftarrow b, & \text{falls } f(c) < 0. \end{cases}$$

   Gehe zu 1.

Nullstellen

Häufige Problemstellung: Finde $x \in I$, so dass

$$f(x) = 0,$$

wobei

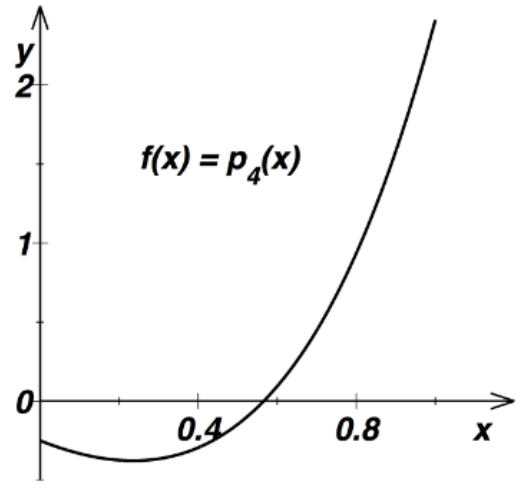
- $f : I \to \mathbb{R}$,
- $I = [a, b] \in \mathbb{R}$.

Definition: Diejenigen $x \in I$ mit $f(x) = 0$ nennt man Nullstellen.

Beispiel

Polynom: Folgende Gleichung ergibt sich aus Standfestigkeitsberechnung:

$$p_4(x) = x^4 + x^3 + 1.662 \cdot x^2 - x - 0.25 = 0.$$



Gesucht: Lösungen im Intervall $I = [0, 1]$.

Lösbarkeit:

- In $\mathbb{C}$ ist die Gleichung immer lösbar (Fundamentalsatz der Algebra).
- In $\mathbb{R}$ nicht garantiert, also Versuch einer Näherung:
  - Betrachte Intervalgrenzen: $p_4(0) = -0.25 < 0$, und $p_4(1) = 2,412 > 0$.
  - Wenn Funktion *ununterbrochen*, dann muss $p_4(x) = 0$ existieren.
  - Idee: Halbiere das Intervall und suche weiter.

Algorithmus

Intervallhalbierungsverfahren: Ist $f : I \to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, stetig (noch zu definieren), und gilt $\mathrm{sign}(f(a)) \neq \mathrm{sign}(f(b))$, so kann man mit folgenden Schritten eine Nullstelle von f approximieren:
Sei $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ und sei $\epsilon > 0$ eine Toleranz.

1. Halbiere das Intervall: $c = \frac{a+b}{2}$.

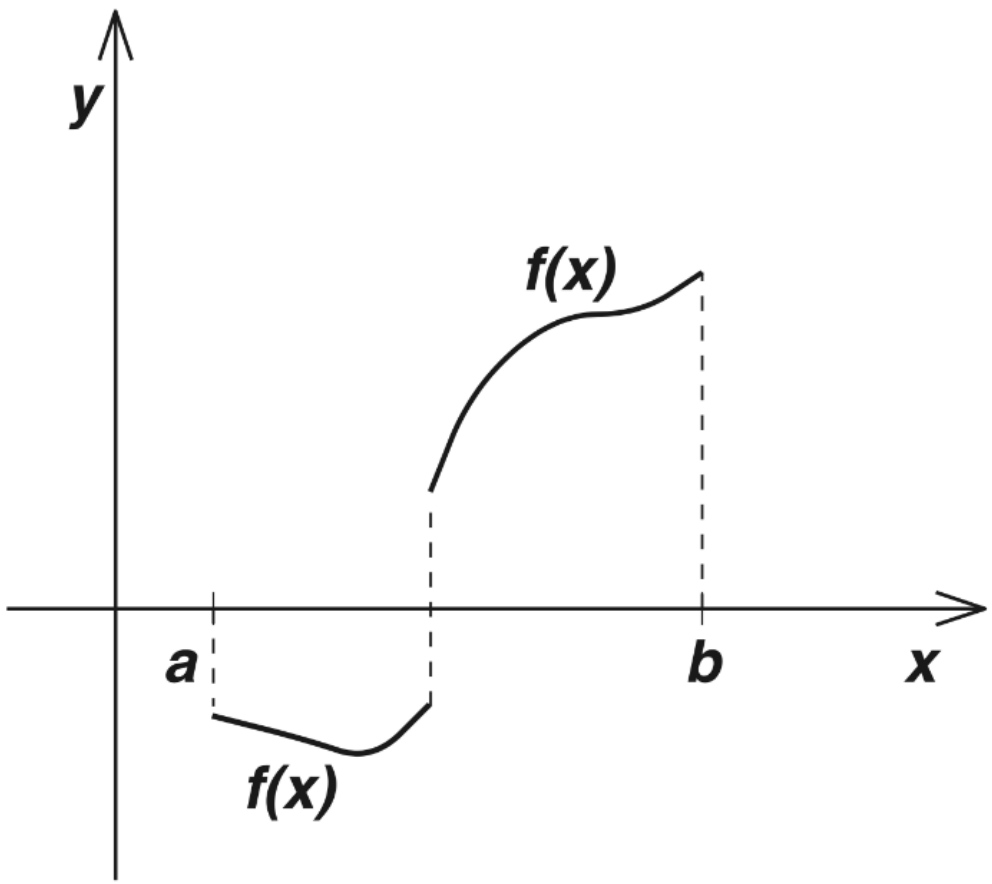
2. Berechne $f(c)$.

   - Falls $|f(c)| < \epsilon$, so ist die gesuchte Nullstelle gefunden. ENDE.
   - Falls $|f(c)| > \epsilon$, dann setze:

   $$\begin{cases} a \leftarrow a, b \leftarrow c, & \text{falls } f(c) > 0, \\ a \leftarrow c, b \leftarrow b, & \text{falls } f(c) < 0. \end{cases}$$

   Gehe zu 1.

Voraussetzung für die Funktion



Funktion darf nicht springen!

Grenzwert

Definitionen

Definition: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $0 < \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$.

- Die Menge $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$ heißt δ-Umgebung von x_0.
- Entsprechend ist $U_\epsilon(f(x_0)) = \{f(x) \in \mathbb{R} : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\}$ eine ϵ-Umgebung von $f(x_0)$.
- $D \subset \mathbb{R}$ heißt offene Menge in $\mathbb{R}$, wenn zu jedem $x \in D$ ein $\delta > 0$ gefunden werden kann, so dass $U_\delta(x) \subset D$.
- $x \in \mathbb{R}$ heißt Randpunkt, falls x nicht innerer Punkt und es gilt: In jeder Umgebung $U_\delta(x)$ gibt es mindestens ein $\bar{x} \in D$ und ein $\tilde{x} \notin D$.
- a heißt Häufungspunkt von D, wenn in jeder δ-Umgebung $U_\delta(a)$ mindestens ein $x \neq a$, $x \in D$, existiert.

①

Grenzwert

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt in D.
Ein Wert $g \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Funktion f an der Stelle a, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, gilt:

$$|f(x) - g| < \epsilon.$$

Der Grenzwert wird mit $g = \lim_{x \to a} f(x)$ bezeichnet.

Bemerkung:

- a muss nicht Element des Definitionsbereichs der Funktion sein.
- g muss nicht Element des Wertebereichs der Funktion sein.

②

Links-/Rechtsseitiger Grenzwert

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt in D.
Ein Wert $g \in \mathbb{R}$ heißt linksseitiger (rechtsseitiger) Grenzwert der Funktion f an der Stelle a, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D \cap U_\delta(a)$ mit $x < a$ ($x > a$), gilt:

$$|f(x) - g| < \epsilon.$$

Der linksseitige (rechtsseitige) Grenzwert wird mit $g = \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x)$ ($g = \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x)$) bezeichnet.

Bemerkung: Der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x) = g$ existiert genau dann, wenn der $\lim_{x \nearrow a} f(x)$ und $\lim_{x \searrow a} f(x)$ existieren und übereinstimmen.

③

Uneigentlicher Grenzwert

Vorbemerkung: Für $x \to \infty$ oder $f(x) \to \infty$ muss die Definition modifiziert werden!

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt in D.
Die Funktion f hat einen uneigentlichen Grenzwert, geschrieben $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, falls gilt: Zu jedem (beliebig großen) $\Psi > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle x mit $|x - a| < \delta$

$$f(x) > \Psi.$$

④

Definitionen

Definition: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $0 < \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$.

- Die Menge $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$ heißt δ-Umgebung von x_0.
- Entsprechend ist $U_\epsilon(f(x_0)) = \{f(x) \in \mathbb{R} : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\}$ eine ϵ-Umgebung von $f(x_0)$.
- $D \subset \mathbb{R}$ heißt offene Menge in $\mathbb{R}$, wenn zu jedem $x \in D$ ein $\delta > 0$ gefunden werden kann, so dass $U_\delta(x) \subset D$.
- $x \in \mathbb{R}$ heißt Randpunkt, falls x nicht innerer Punkt und es gilt: In jeder Umgebung $U_\delta(x)$ gibt es mindestens ein $\bar{x} \in D$ und ein $\tilde{x} \notin D$.
- a heißt Häufungspunkt von D, wenn in jeder δ-Umgebung $U_\delta(a)$ mindestens ein $x \neq a$, $x \in D$, existiert.

Grenzwert

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt in D. Ein Wert $g \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Funktion f an der Stelle a, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, gilt:

$$|f(x) - g| < \epsilon.$$

Der Grenzwert wird mit $g = \lim_{x \to a} f(x)$ bezeichnet.

Bemerkung:

- a muss nicht Element des Definitionsbereichs der Funktion sein.
- g muss nicht Element des Wertebereichs der Funktion sein.

②

Links-/Rechtsseitiger Grenzwert

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt in D.
Ein Wert $g \in \mathbb{R}$ heißt linksseitiger (rechtsseitiger) Grenzwert der Funktion f an der Stelle a, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D \cap U_\delta(a)$ mit $x < a$ $(x > a)$, gilt:

$$|f(x) - g| < \epsilon.$$

Der linksseitige (rechtsseitige) Grenzwert wird mit $g = \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x)$ $(g = \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x))$ bezeichnet.

Bemerkung: Der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x) = g$ existiert genau dann, wenn der $\lim_{x \nearrow a} f(x)$ und $\lim_{x \searrow a} f(x)$ existieren und übereinstimmen.

3

Uneigentlicher Grenzwert

Vorbemerkung: Für $x \to \infty$ oder $f(x) \to \infty$
muss die Definition modifiziert werden!

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt in D.
Die Funktion f hat einen uneigentlichen Grenzwert, geschrieben $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, falls gilt: Zu jedem (beliebig großen) $\Psi > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle x mit $|x - a| < \delta$

$$f(x) > \Psi.$$

④

Rechnen mit Grenzwerten

Grenzwertsätze

Satz: Betrachte für die folgenden Regeln jeweils einen der Fälle:

$$x \to a, \quad x \nearrow a, \quad x \searrow a, \quad x \to \infty, \quad x \to -\infty.$$

Setze voraus, dass die jeweiligen Grenzwerte existieren, dann gelten:

1. $\lim(f+g) = \lim f + \lim g$,
2. $\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$,
3. $\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$, falls $\lim g \neq 0$,
4. $f \leq g \;\Rightarrow\; \lim f \leq \lim g$,
5. $f \leq g \leq h$ und $\lim f = \lim h = y \;\Rightarrow\; \lim g = y$.

Konvergenzordnung

Definition: Sei $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ und es gebe $k > 0$, so dass

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x)|}{|x-a|^k} = c > 0.$$

Dann verschwindet $f(x)$ für $x \to a$ von der Ordnung k. Schreibe auch

$$f(x) = O(|x-a|^k) \text{ für } x \to a.$$

Sei $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ (oder $-\infty$) und es gebe $k > 0$, so dass

$$\lim_{x\to a} |f(x)| \cdot |x-a|^k = c > 0.$$

Dann geht $f(x)$ für $x \to a$ von der Ordnung k gegen ∞ (oder $-\infty$). Schreibe auch

$$f(x) = O(|x-a|^{-k}) \text{ für } x \to a.$$

⑤

Grenzwerte in Abhängigkeit von Ordnungen

Satz: Sei $f(x) = O(|x-a|^\alpha)$ und $g(x) = O(|x-a|^\beta)$. Dann folgt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \text{ falls } \alpha > \beta \text{ und } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty, \text{ falls } \alpha < \beta.$$

Sei $f(x) = O(|x-a|^\alpha)$ mit $\alpha > 0$ und $g(x) = O(|x-a|^\beta)$ mit $\beta < 0$. Dann folgt

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$$

Grenzwertsätze

Satz: Betrachte für die folgenden Regeln jeweils einen der Fälle:

$$x \to a, \quad x \nearrow a, \quad x \searrow a, \quad x \to \infty, \quad x \to -\infty.$$

Setze voraus, dass die jeweiligen Grenzwerte existieren, dann gelten:

1. $\lim(f+g) = \lim f + \lim g$,
2. $\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$,
3. $\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$, falls $\lim g \neq 0$,
4. $f \leq g \;\Rightarrow\; \lim f \leq \lim g$,
5. $f \leq g \leq h$ und $\lim f = \lim h = y \;\Rightarrow\; \lim g = y$.

Bemerkungen: Die Regeln gelten analog auch für unbestimmte Grenzwerte.

1. $\infty - \infty$ sei ausgeschlossen, $\infty + \infty = \infty$ sei vereinbart.
2. $0 \cdot \infty$ sei ausgeschlossen, $\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$ sei vereinbart.
3. $\frac{\infty}{\infty}$ sei ausgeschlossen, $\frac{b}{\pm\infty} = 0$ sei vereinbart.

Im Falle weiterer Unbestimmtheit können die Sätze nicht angewandt werden.

Bemerkungen: Die Regeln gelten analog auch für unbestimmte Grenzwerte.

1. $\infty - \infty$ sei ausgeschlossen, $\infty + \infty = \infty$ sei vereinbart.
2. $0 \cdot \infty$ sei ausgeschlossen, $\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$ sei vereinbart.
3. $\frac{\infty}{\infty}$ sei ausgeschlossen, $\frac{0}{\pm\infty} = 0$ sei vereinbart.

Im Falle weiterer Unbestimmtheit können die Sätze nicht angewandt werden.

Konvergenzordnung

Definition: Sei $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ und es gebe $k > 0$, so dass

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x)|}{|x-a|^k} = c > 0.$$

Dann verschwindet $f(x)$ für $x \to a$ von der Ordnung k. Schreibe auch

$$f(x) = O(|x-a|^k) \text{ für } x \to a.$$

Sei $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ (oder $-\infty$) und es gebe $k > 0$, so dass

$$\lim_{x\to a} |f(x)| \cdot |x-a|^k = c > 0.$$

Dann geht $f(x)$ für $x \to a$ von der Ordnung k gegen ∞ (oder $-\infty$). Schreibe auch

$$f(x) = O(|x-a|^{-k}) \text{ für } x \to a.$$

Konvergenzordnung für unbestimmte Grenzwerte

Analog: Sei $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und es gebe $k > 0$, so dass

$$\lim_{x\to\infty} |x|^k |f(x)| = c > 0.$$

Dann verschwindet $f(x)$ für $x \to \infty$ von der Ordnung k. Schreibe auch

$$f(x) = O(|x|^{-k}) \text{ für } x \to \infty.$$

Sei $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (oder $-\infty$) und es gebe $k > 0$, so dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|x|^k} = c > 0.$$

Dann geht $f(x)$ für $x \to \infty$ von der Ordnung k gegen ∞ (oder $-\infty$). Schreibe auch

$$f(x) = O(|x|^k) \text{ für } x \to \infty.$$

Analoges gilt für $x \to -\infty$.

Grenzwerte in Abhängigkeit von Ordnungen

Satz: Sei $f(x) = O(|x-a|^\alpha)$ und $g(x) = O(|x-a|^\beta)$. Dann folgt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \text{ falls } \alpha > \beta \text{ und } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty, \text{ falls } \alpha < \beta.$$

Sei $f(x) = O(|x-a|^\alpha)$ mit $\alpha > 0$ und $g(x) = O(|x-a|^\beta)$ mit $\beta < 0$. Dann folgt

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$$

Analysis I

Motivation

Nullstellen

Beispiel

Algorithmus

Grenzwert

Grenzwert

Definitionen

Links-/Rechtsseitiger Grenzwert

Uneigentlicher Grenzwert

Rechnen mit Grenzwerten

Grenzwertsätze

Konvergenzordnung

Grenzwerte in Abhängigkeit von Ordnungen