

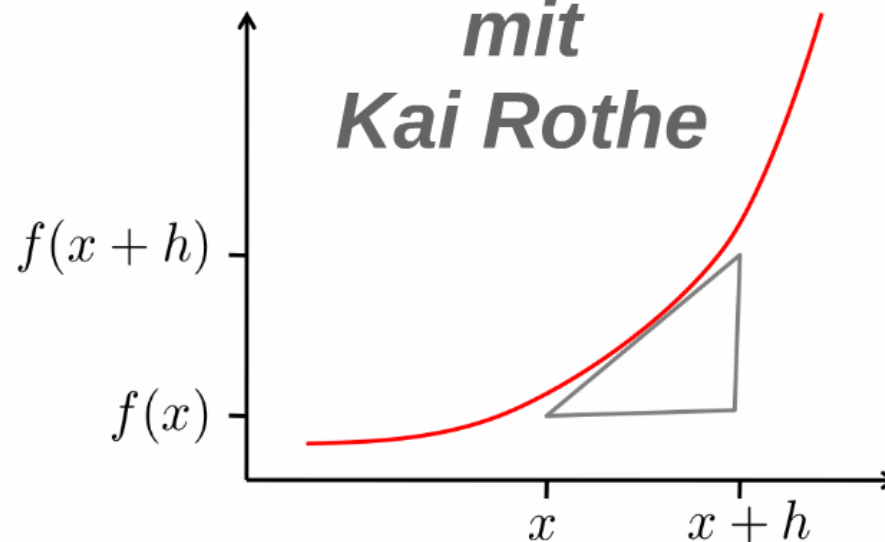
Analysis I

Winter 2020/21

Jörn Behrens

mit

Kai Rothe



Eigenschaften Stetiger Funktionen und
Differenzierbarkeit

Buch Kapitel 2.5-2.6

Maximum/Minimum stetiger Funktionen

Erinnerung

Bemerkung: Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

- Falls f nach oben beschränkt, dann gilt: $f(x) < \sup_{x \in D} f(x)$.
- Falls f nach unten beschränkt, dann gilt: $f(x) \geq \inf_{x \in D} f(x)$.

Aber: Infimum bzw. Supremum müssen nicht angenommen werden!
(Beispiel $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $D =]0; \infty[$.)

Definition

Definition: Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

- Falls x_0 existiert, so dass $f(x_0)$ gleich dem Supremum, d.h.

$$f(x) < f(x_0) = \sup_{x \in D} f(x), \quad \forall x \in D,$$

so heißt $f(x_0)$ das **Maximum** von f (schreibe $\max_{x \in D} f(x) = f(x_0)$).

- x_0 heißt dann **Maximalstelle** von f .

- Falls x_0 existiert, so dass $f(x_0)$ gleich dem Infimum, d.h.

$$f(x) \geq f(x_0) = \inf_{x \in D} f(x), \quad \forall x \in D,$$

so heißt $f(x_0)$ das **Minimum** von f (schreibe $\min_{x \in D} f(x) = f(x_0)$).

- x_0 heißt dann **Minimalstelle** von f .

Mengeneigenschaften

Definition: Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Menge.

- A heißt **abgeschlossen**, wenn alle Häufungspunkte a der Menge A auch Elemente der Menge sind, d.h. $a \in A$.
- A heißt **kompakt**, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Bemerkung: Abgeschlossene Intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Intervalle sind kompakte Mengen in \mathbb{R} .

Frage

Unter welchen Bedingungen existieren Maximum und Minimum einer Funktion f ?

Erinnerung

Bemerkung: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

- Falls f nach oben beschränkt, dann gilt: $f(x) \leq \sup_{x \in d} f(x)$.
- Falls f nach unten beschränkt, dann gilt: $f(x) \geq \inf_{x \in d} f(x)$.

Aber: Infimum bzw. Supremum müssen nicht angenommen werden!
(Beispiel $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $D =]0, \infty[.$)

Definition

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

- Falls x_0 existiert, so dass $f(x_0)$ gleich dem Supremum, d.h.

$$f(x) \leq f(x_0) = \sup_{x \in D} f(x), \quad \forall x \in D,$$

so heißt $f(x_0)$ das **Maximum** von f (schreibe $\max_{x \in D} f(x) = f(x_0)$).

- x_0 heißt dann **Maximalstelle** von f .

- Falls x_0 existiert, so dass $f(x_0)$ gleich dem Infimum, d.h.

$$f(x) \geq f(x_0) = \inf_{x \in D} f(x), \quad \forall x \in D,$$

so heißt $f(x_0)$ das **Minimum** von f (schreibe $\min_{x \in D} f(x) = f(x_0)$).

- x_0 heißt dann **Minimalstelle** von f .

Mengeneigenschaften

Definition: Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Menge.

- A heißt **abgeschlossen**, wenn alle Häufungspunkte a der Menge A auch Elemente der Menge sind, d.h. $a \in A$.
- A heißt **kompakt**, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Bemerkung: Abgeschlossene Intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Intervalle sind kompakte Mengen in \mathbb{R} .

Frage

Unter welchen Bedingungen existieren Maximum und Minimum einer Funktion f ?

Satz von Weierstrass

Satz (Weierstrass): Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt und besitzt Maximum und Minimum;

d.h. $\exists x_0, x_1 \in [a, b]$ mit $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \forall x \in [a, b]$.

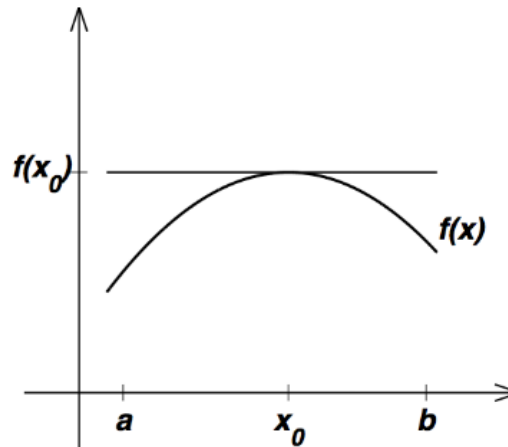
Bemerkung: Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion nimmt also auf $[a, b]$ Maximum und Minimum an!

Differenzierbarkeit

Motivation

Berechnung von Tangenten

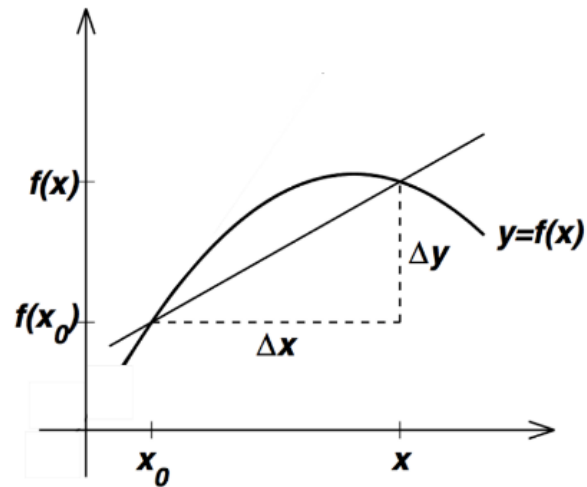
- Geschwindigkeiten aus Weg-Zeit Kurven
- Tendenzen
- Maxima/Minima (Tangente Null)



Differenzenquotient

Definition: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall. Für $x_0, x \in I$ ist der **Differenzenquotient** definiert durch:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0.$$



Differenzierbarkeit

Definition: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall.
 f heißt **differenzierbar** in $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert.

Bezeichnungen: Der Grenzwert wird mit

$$f'(x_0), \quad \text{oder} \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \text{oder} \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$$

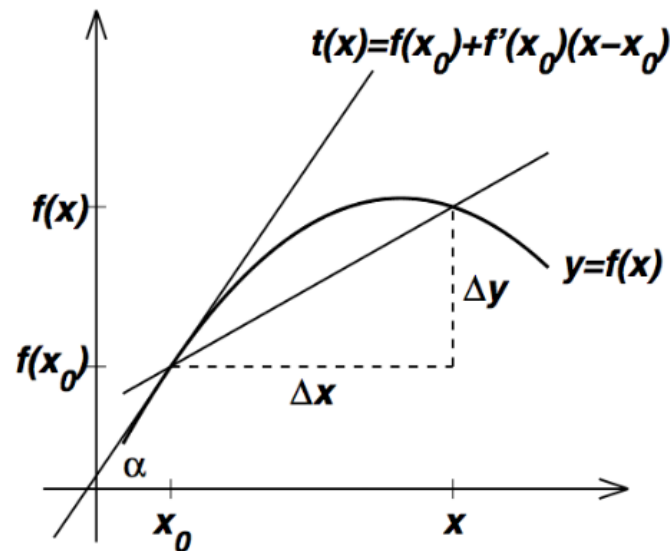
bezeichnet und **Ableitung** oder **Differentialquotient** von f in x_0 genannt.

- Eigenschaften**
- Die Ableitung ist die Steigung der Tangente an $f(x)$ in x_0 .
 - Die Ableitung ist ein Grenzwert, der durch die Steigung des Tangentes an $f(x)$ in x_0 gegeben ist.
 - Die Ableitung ist ein Grenzwert, der durch die Steigung des Tangentes an $f(x)$ in x_0 gegeben ist.
 - Die Ableitung ist ein Grenzwert, der durch die Steigung des Tangentes an $f(x)$ in x_0 gegeben ist.



Eigenschaften:

- Geometrisch: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist die Steigung der Sekante an f in x und x_0 .
- Grenzübergang: x rückt näher an x_0 , damit nähert sich Steigung der Sekante der Tangente $f'(x_0)$ an.
- Tangente: $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ existiert genau dann, wenn f in x_0 differenzierbar ist.
- Winkel: Anstieg $f'(x_0)$ beschreibt $\tan \alpha$, mit α dem Winkel zwischen Tangente und x -Achse.



Rechts-/linksseitige Differenzierbarkeit

Definition: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall und sei $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
 f heißt **rechts-** bzw. **linksseitig differenzierbar** in $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \searrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ bzw. } \lim_{\Delta x \nearrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

existiert.

Bemerkung: Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar,
falls rechts- und linksseitiger Grenzwert von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ existieren und gleich sind.

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall. f heißt **differenzierbar auf $I \subset D$** ,
falls f in jedem inneren Punkt von I differenzierbar ist, und in jedem zu I gehörigen
Randpunkt einseitig differenzierbar ist.

Definition: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall und sei $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. f heißt **rechts- bzw. linksseitig differenzierbar** in $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert


$$\lim_{\Delta x \searrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ bzw. } \lim_{\Delta x \nearrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

existiert.

Bemerkung: Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar, falls rechts- und linksseitiger Grenzwert von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ existieren und gleich sind.

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall. f heißt **differenzierbar auf $I \subset D$** , falls f in jedem inneren Punkt von I differenzierbar ist, und in jedem zu I gehörigen Randpunkt einseitig differenzierbar ist.

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall. f heißt **differenzierbar auf $I \subset D$** , falls f in jedem inneren Punkt von I differenzierbar ist, und in jedem zu I gehörigen Randpunkt einseitig differenzierbar ist.



Frage: Ist $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$

1. rechtsseitig differenzierbar?
2. linksseitig differenzierbar?
3. differenzierbar?

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Satz: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion in x_0 differenzierbar.
Dann ist f an der Stelle x_0 auch stetig.

Bemerkung: Die Umkehrung gilt nicht!
Gegenbeispiel: $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$.

Differentiationsregeln

Summe, Produkt, Quotient: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

- $(f + g)' = f' + g'$;
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, mit $c \in \mathbb{R}$;
- $(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel);
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, falls $g \neq 0$ (Quotientenregel).

Kettenregel: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$(f \circ g(x))' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ableitungen der Grundfunktionen: Es gilt:

- $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$, mit $\nu \in \mathbb{Z}$;
- $(\sin x)' = \cos x$, und $(\cos x)' = -\sin x$;
- $(e^x)' = e^x$ und $(a^x)' = a^x \ln a$ mit $a > 0$;
- $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$, falls $x \neq 0$;
- $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$, falls $a > 0$, $x \neq 0$;

Umkehrfunktion: Ist $y = f(x)$ bijektiv und differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so gilt:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{bzw.} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Die unabh. Veränderliche nennen wir wieder x .
Der Definitionsbereich von f^{-1} ist der Wertebereich von f .

Summe, Produkt, Quotient: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

- $(f + g)' = f' + g'$;
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, mit $c \in \mathbb{R}$;
- $(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel);
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, falls $g \neq 0$ (Quotientenregel).

Kettenregel: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$(f \circ g(x))' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Umkehrfunktion: Ist $y = f(x)$ bijektiv und differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so gilt:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{bzw.} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Die unabh. Veränderliche nennen wir wieder x .

Der Definitionsbereich von f^{-1} ist der Wertebereich von f .

Ableitungen der Grundfunktionen: Es gilt:

- $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$, mit $\nu \in \mathbb{Z}$;
- $(\sin x)' = \cos x$, und $(\cos x)' = -\sin x$;
- $(e^x)' = e^x$ und $(a^x)' = a^x \ln a$ mit $a > 0$;
- $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$, falls $x \neq 0$;
- $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$, falls $a > 0$, $x \neq 0$;

Analysis I

Winter 2020/21
Jörn Bebergs
mit
Karl Rothke
Eigenschaften stetiger Funktionen und
Differenzierbarkeit
Sommersemester 2021

