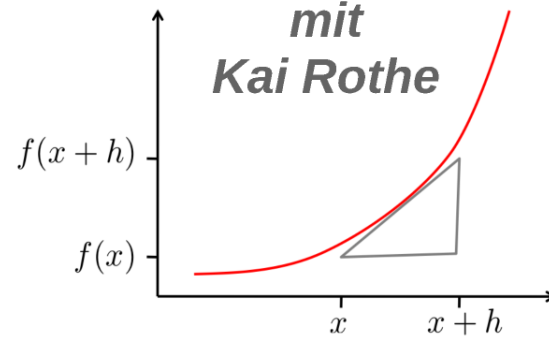


Analysis I

Winter 2016/17

**Jörn Behrens
mit
Kai Rothe**



Newton-Verfahren, Kurven ▢

Buch Kapitel 2.11 und 2.12

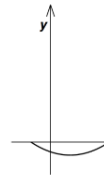
Erinnerung: Fixpunktiteration

Idee: Durch die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die definiert ist durch

$$x_0 \in I, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

ist im Falle der Konvergenz bei stetiger Funktion f ein Fixpunkt gegeben.
Die Folge heißt dann eine **Fixpunkt-Folge**.

2. berechne Schnittpunkt der Tangente $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ mit x -Achse.
3. Wähle diesen Wert als neues x_1 und fahre fort.



Ana

Winte

Jörn

Ka

$f(x+h)$

$f(x)$

Newton-Vi

Buch Kap

Idee: Durch die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die definiert ist durch

$$x_0 \in I, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

ist im Falle der Konvergenz bei stetiger Funktion f ein Fixpunkt gegeben.
Die Folge heißt dann eine **Fixpunkt-Folge**.

Idee: Durch die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die definiert ist durch

$$x_0 \in I, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

ist im Falle der Konvergenz bei stetiger Funktion f ein Fixpunkt gegeben.
Die Folge heißt dann eine **Fixpunkt-Folge**.

Satz: (Bannachscher Fixpunktsatz in \mathbb{R})

Sei $f : I \rightarrow I$ eine Funktion die $I \subset \mathbb{R}$ in sich abbildet. Weiter gelte für alle $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

mit einer von x, y unabhängigen Konstanten $0 < K < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in I$ und die durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definierte Iterationsfolge (x_n) konvergiert für jeden beliebigen Anfangspunkt $x_0 \in I$ gegen diesen Fixpunkt.



Idee Newton-Verfahren

Beobachtung: Die Fixpunkt-Iteration benötigt zwei wichtige Voraussetzungen:

1. $f: I \rightarrow I$,
2. $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ mit $|K| < 1$, $x, y \in I$.

Frage: Was können wir tun, wenn diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind?

Idee: Nach der Taylor-Formel ist die Tangente für x in der Nähe einer Nullstelle \tilde{x}

$$g(x) = f(x) + f'(x)(x - \tilde{x})$$

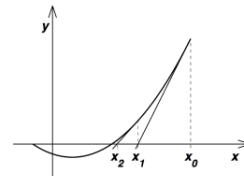
eine gute (erste) Näherung an die Funktion. Ein Algorithmus könnte also aus folgenden Schritten bestehen:

1. Wähle x_0 in der Nähe von \tilde{x} .
2. Berechne Schnittpunkt der Tangente $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ mit x -Achse.
3. Wähle diesen Wert als neues x_1 und fahre fort.

Iteration: Setze also

$$g(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Dabei muss $f'(x) \neq 0$ gelten.



Iteration:
Iteration

ist durch

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, \dots$

Newton-

Satz: (Newton-Verfahren)

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall I zweimal stetig differenzierbare Funktion. Existiere $K \in \mathbb{R}$, $0 < K < 1$ mit

$$|f''(x)| \leq K |f'(x)|$$

Beobachtung: Die Fixpunkt-Iteration benötigt zwei wichtige Voraussetzungen:

1. $f : I \rightarrow I$,
2. $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ mit $|K| < 1$, $x, y \in I$.

Frage: Was können wir tun, wenn diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind?

Idee: Nach der Taylor-Formel ist die Tangente für x in der Nähe einer Nullstelle \bar{x}

$$g(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

eine gute (erste) Näherung an die Funktion. Ein Algorithmus könnte also aus folgenden Schritten bestehen:

1. Wähle x_0 in der Nähe von \bar{x} ,
2. Berechne Schnittpunkt der Tangente $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ mit x -Achse.
3. Wähle diesen Wert als neues x_1 und fahre fort.

Iteration: Setze also

$$g(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Dabei muss $f'(x) \neq 0$ gelten.

Iteration: Setze also

$$g(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Dabei muss $f'(x) \neq 0$ gelten.

Allgemein: Definiere Iteration (**Newton-Folge**)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Iteration: Setze also

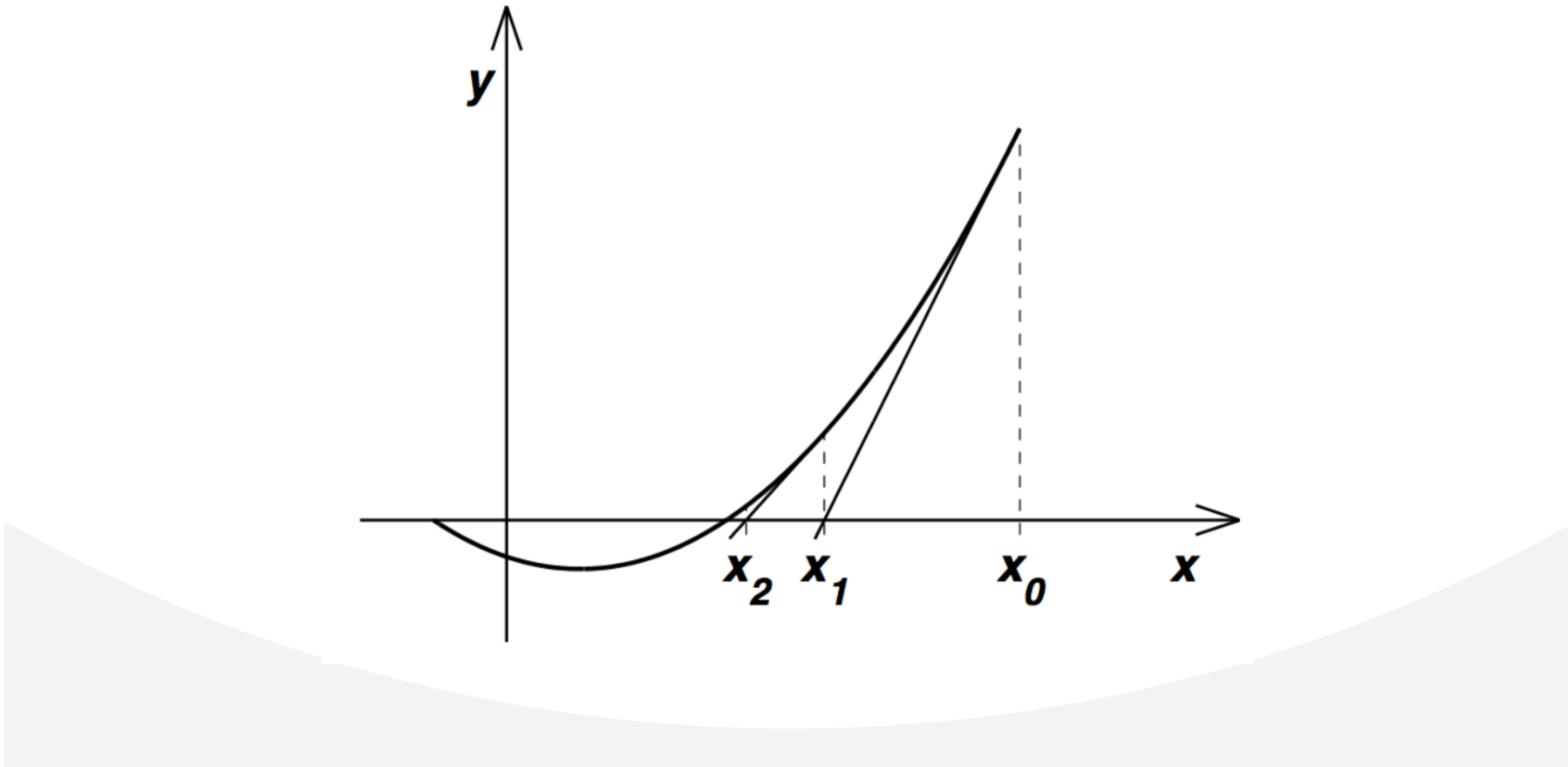
$$g(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Dabei muss $f'(x) \neq 0$ gelten.

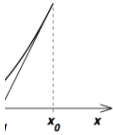
Allgemein: Definiere Iteration (**Newton-Folge**)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Frage: Unter welchen Bedingungen konvergiert die Newton-Folge?



Frage: Unter welchen Bedingungen konvergiert die Newton-Folge?



Newton-Verfahren

Satz: (Newton-Verfahren)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $I \supset [x_0 - r, x_0 + r]$ ($r > 0$) definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Weiterhin existiere $K \in \mathbb{R}$, $0 < K < 1$ mit

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq K \quad \text{für alle } x \in I$$

und

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq (1 - K)r.$$

Dann hat f genau eine Nullstelle \bar{x} in I und die Newton-Folge konvergiert quadratisch gegen \bar{x} , d.h. es gilt

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C(x_n - \bar{x})^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{M} \quad \text{mit } 0 < M = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$



Beweisidee:

- Definiere Hilfsfunktion $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
- Definiere Iterationsfolge $x_{n+1} = g(x_n)$
- Wende auf die Iterationsfolge den Banachschen Fixpunktsatz an.

'sis I

16/17

rens

the



ren, Kurven

11 und 2.12

Satz: (Newton-Verfahren)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $I \supset [x_0 - r, x_0 + r]$ ($r > 0$) definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Weiterhin existiere $K \in \mathbb{R}$, $0 < K < 1$ mit

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq K \quad \text{für alle } x \in I$$

und

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq (1 - K)r.$$

Dann hat f genau eine Nullstelle \bar{x} in I und die Newton-Folge konvergiert quadratisch gegen \bar{x} , d.h. es gilt

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C(x_n - \bar{x})^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{M} \quad \text{mit } 0 < M = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$



Beweisidee:

- Definiere Hilfsfunktion $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
- Definiere Iterationsfolge $x_{n+1} = g(x_n)$
- Wende auf die Iterationsfolge den Bannachschen Fixpunktsatz an.

Beweisidee:

- Definiere Hilfsfunktion $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
- Definiere Iterationsfolge $x_{n+1} = g(x_n)$
- Wende auf die Iterationsfolge den Bannachschen Fixpunktsatz an.

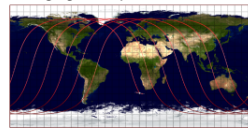
Bemerkungen:

- Newton-Verfahren funktioniert, wenn x_0 nah genug an \bar{x} liegt, denn dann ist $|f(x_0)|$ klein und $r > 0$ und $K > 0$ können existieren.
- Quadratische Konvergenz bedeutet, dass der Approximationsfehler sich in jedem Schritt quadriert (Beschleunigung der Konvergenz!).
- Ein gutes x_0 findet man in der Praxis häufig durch *ausprobieren*...
- Das Verfahren kann verbessert werden, so dass für (fast) beliebige Startwerte Konvergenz erzielt werden kann (gedämpftes Newton-Verfahren).

Kurven

Motivation

- Anwendungen von Kurven:
- Satelliten-Bahnen
 - Flug-Kurven
 - Teichen-Bahnen
 - Bewegung von Körpern



Bogenlänge einer Kurve

Kurvenlänge: Die Länge der Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die Länge des Streckenstückes $\gamma([a, b])$ in \mathbb{R}^n .
 Berechnung: $L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$.
 Beachte: Die Länge der Kurve γ ist unabhängig von der Parametrisierung γ .
 Anwendung: Die Bogenlänge s der Ellipse $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ist $L(\gamma) = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$.
 Für ein $2D$ -Streckchen $\gamma(t) = (t, f(t))$ gilt $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$.



Definition

Definition: (Kurve im \mathbb{R}^n)
 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow G, \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $\gamma_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\dot{\gamma}_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Kurvenstück** in G mit

- **Anfangspunkt:** $\gamma(a) = (x_1, \dots, x_n)^T$,
- **Endpunkt:** $\gamma(b) = (x_1, \dots, x_n)^T$,
- **Spur:** $\{\gamma(t) \mid a \leq t \leq b\}$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem \mathbb{R}^n werden Spaltenvektoren verwendet:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n)^T$$

Ein Kurvenstück heißt **regulär**, wenn für alle $t \in [a, b]$ gilt

$$\dot{\gamma}_1(t)^2 + \dots + \dot{\gamma}_n(t)^2 > 0.$$

Eine **Parametrisierung** des Kurvenstücks mit dem Parameter t ist gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

Durch wachsende Werte des Parameters t ist für das Kurvenstück eine **Orientierung** gegeben.

Eine Kreisdarstellung von Kurvenstücken $K_i, (i = 1, \dots, r)$ wobei der Anfangspunkt von K_i dem Endpunkt von K_{i-1} ($i = 2, \dots, r$) entspricht, heißt **Kurve**.

Die hier von Kurvenstücken hergeleitete Kurve ist nicht mehr als Punkte beschreibbar.

Kurventangente

Tangente: Zur Parametrisierung $\gamma(t)$ einer Kurve kann man definieren

$$\dot{\gamma}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnet $\dot{\gamma}(t)$ die Ableitung von $\gamma(t)$, wenn t die Zeit ist.

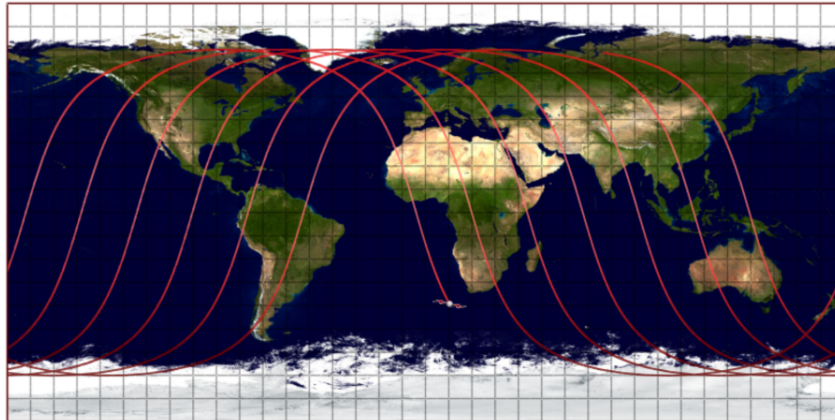
Definition: $\dot{\gamma}(t)$ heißt **Tangentenvektor** der Kurve $\gamma(t)$ im Punkt $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$.



Motivation

Anwendungen von Kurven:

- Satelliten-Bahnen
- Flug-Kurven
- Teilchen-Bahnen
- Bewegung von Körpern

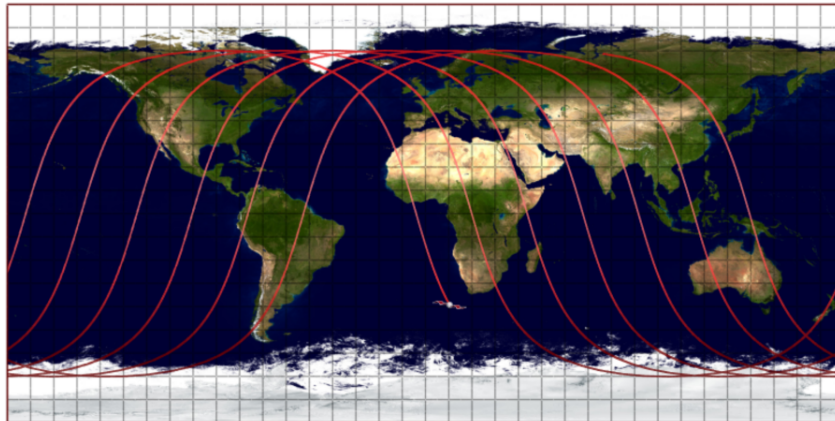


Motivation

Anwendungen von Kurven:

- Satelliten-Bahnen
- Flug-Kurven
- Teilchen-Bahnen
- Bewegung von Körpern

Hier:
Beschränkung auf \mathbb{R}^2 !



Definition

Definition: (Kurve im \mathbb{R}^2)

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung

$$\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Kurvenstück** in G mit

- **Anfangspunkt** $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a))^T$,
- **Endpunkt** $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b))^T$,
- **Spur** $\{\mathbf{x}(t) | a \leq t \leq b\}$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem \mathbb{R}^2 werden Spaltenvektoren verwendet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^T.$$

Ein Kurvenstück heißt **regulär**, wenn für alle $t \in [a, b]$ gilt:

$$(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 > 0.$$

Eine **Parameterdarstellung** des Kurvenstücks mit dem Parameter t ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Durch wachsende Werte des Parameters t ist für das Kurvenstück eine **Orientierung** gegeben.

Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken K_i ($i = 1 : r$), wobei der Anfangspunkt von K_i dem Endpunkt von K_{i-1} ($i = 2 : r$) entspricht, heißt **Kurve**.

Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es oft auch als Kurve bezeichnet.

$\mathbb{R}^2!$



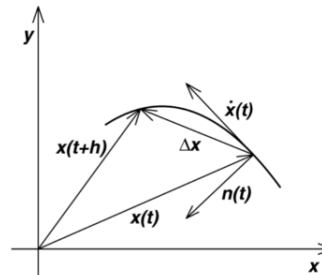
Kurventangente

Tangente: Zur Parameterdarstellung $\mathbf{x}(t)$ einer Kurve kann man definieren:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnet $\dot{x}(t)$ die Ableitung von $x(t)$, wenn t die Zeit ist.

Definition: $\dot{\mathbf{x}}(t)$ heißt **Tangentenvektor** der Kurve $\mathbf{x}(t)$ im Punkt $(x(t), y(t))^T$.



e

→
x



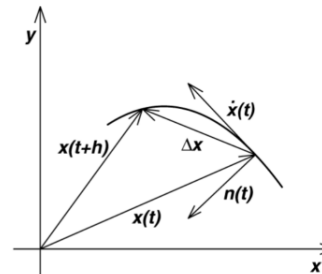
Kurventangente

Tangente: Zur Parameterdarstellung $\mathbf{x}(t)$ einer Kurve kann man definieren:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnet $\dot{x}(t)$ die Ableitung von $x(t)$, wenn t die Zeit ist.

Definition: $\dot{\mathbf{x}}(t)$ heißt **Tangentenvektor** der Kurve $\mathbf{x}(t)$ im Punkt $(x(t), y(t))^T$.



Bemerkungen:

- Für die Tangente T in $(x(t_0), y(t_0))^T$ ergibt sich mit dem Anstieg $\tan \alpha = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$ die Gleichung

$$y = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0)). \quad \text{①}$$

- Die Normale N in $(x(t_0), y(t_0))^T$ steht senkrecht auf T , hat also den Anstieg

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}.$$

Die Gleichung für die Normale lautet also

$$y = y(t_0) - \frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}(x - x(t_0)).$$

- Einen **Normalenvektor** $\mathbf{n}(t_0)$ in $(x(t_0), y(t_0))^T$, d.h. $\mathbf{n}(t_0)$ steht senkrecht auf $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$, erhält man durch

$$\mathbf{n}(t_0) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}.$$

Bemerkungen:

- Für die Tangente T in $(x(t_0), y(t_0))^\top$ ergibt sich mit dem Anstieg $\tan \alpha = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$ die Gleichung

$$y = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0)). \quad \text{1}$$

- Die Normale N in $(x(t_0), y(t_0))^\top$ steht senkrecht auf T , hat also den Anstieg

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}.$$

Die Gleichung für die Normale lautet also

$$y = y(t_0) - \frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}(x - x(t_0)).$$

- Einen **Normalenvektor** $\mathbf{n}(t_0)$ in $(x(t_0), y(t_0))^\top$, d.h. $\mathbf{n}(t_0)$ steht senkrecht auf $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$, erhält man durch

$$\mathbf{n}(t_0) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}.$$

Bogenlänge einer Kurve

Sekantenlänge: Die Länge der Sekante $c = \mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)$ ist nach *Pythagoras*:

$$c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x(t+h) - x(t))^2 + (y(t+h) - y(t))^2}$$

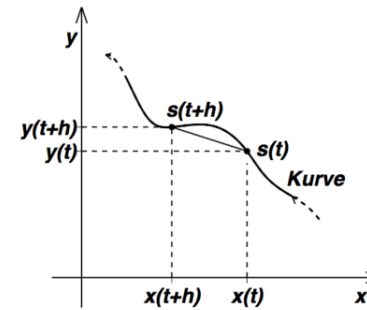
Bogenlänge: Die Länge des Kurvenbogens Δs vom Punkt $\mathbf{x}(t+h)$ bis $\mathbf{x}(t)$ ist für kleines h etwa gleich der Sekantenlänge: $c \approx \Delta s$ ($h \rightarrow 0$).

Andererseits ist die Bogenlänge auch die Differenz der Kurvenlänge $s(t+h)$ und $s(t)$. Also bildet man

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \sqrt{\left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right)^2 + \left(\frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right)^2}$$

Für $x(t)$ und $y(t)$ differenzierbar (z.B. reguläre Kurven) lässt sich schreiben

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$$



2

T:

D:

D:

Bogenlänge einer Kurve

Sekantenlänge: Die Länge der Sekante $c = \mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)$ ist nach *Pythagoras*:

$$c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x(t+h) - x(t))^2 + (y(t+h) - y(t))^2}$$

Bogenlänge: Die Länge des Kurvenbogens Δs vom Punkt $\mathbf{x}(t+h)$ bis $\mathbf{x}(t)$ ist für kleines h etwa gleich der Sekantenlänge: $c \approx \Delta s$ ($h \rightarrow 0$).

Andererseits ist die Bogenlänge auch die Differenz der Kurvenlänge $s(t+h)$ und $s(t)$. Also bildet man

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \sqrt{\left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right)^2 + \left(\frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right)^2}$$

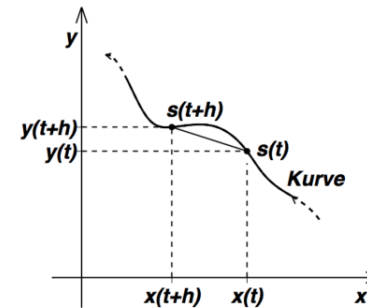
Für $x(t)$ und $y(t)$ differenzierbar (z.B. reguläre Kurven) lässt sich schreiben

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$$

Bogenlänge: (Bogendifferential)

$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

heißt **Differential der Bogenlänge** (oder Bogenelement), wobei dt das Differential der unabhängigen Variablen t ist.



2

T:

D:

D:

Krümmung einer Kurve

Anschaulich: Krümmung = Abweichung von Geraden
Also: Gerade habe die Krümmung 0 (Null).

Definition (Mathematisch Formal):

Die **Krümmung** einer regulären Kurve $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^T$, $t \in [a, b]$ mit zweimal stetig diff'baren Funktionen $x, y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beträgt im Punkt $P(t) = (x(t), y(t))^T$

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{dx}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\dot{y}(t) - \dot{y}(t)\dot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}}$$

Falls die Kurve als Graph der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))^T$ gegeben ist, ergibt sich

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}}$$

$R = \frac{1}{|\kappa|}$ heißt **Krümmungsradius**.

3

Anschaulich:

Krümmung = Abweichung von Geraden

Also: Gerade habe die Krümmung 0 (Null).

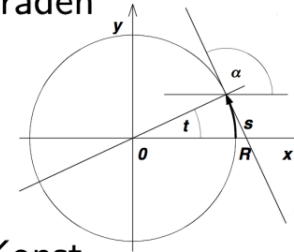
Anschaulich:

Krümmung = Abweichung von Geraden

Also: Gerade habe die Krümmung 0 (Null).

Andererseits:

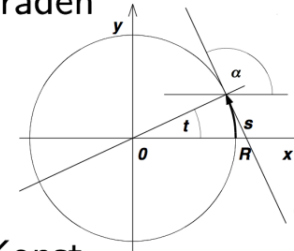
Krümmung einer Kreislinie = $K = \text{Konst.}$



Anschaulich:

Krümmung = Abweichung von Geraden

Also: Gerade habe die Krümmung 0 (Null).



Andererseits:

Krümmung einer Kreislinie = $K = \text{Konst.}$

Mathematisch (Motivation):

$$\text{Krümmung} = \kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$$

Definition (Mathematisch Formal):

Die **Krümmung** einer regulären Kurve $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^T$, $t \in [a, b]$ mit zweimal stetig diff'baren Funktionen $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beträgt im Punkt $P(t) = (x(t), y(t))^T$

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^3}}.$$

Falls die Kurve als Graph der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))^T$ gegeben ist, ergibt sich

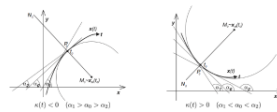
$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{(1 + (f'(t))^2)^3}}.$$

$R = \frac{1}{|\kappa|}$ heißt **Krümmungsradius**.

3

Eigenschaften der Krümmung

Bemerkung (positive und negative Krümmung):
Durch wachsendes t (bzw. wachsende Bogenlänge $s(t)$) ist eine Orientierung der Kurve gegeben.
Die Krümmung $\kappa(t)$ ist in einem Punkt $P_t = (x(t), y(t))$ positiv bzw. negativ, falls der Anstieg $\kappa(t)$ der Tangenten wächst oder fällt.

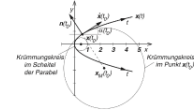


Bemerkungen (Krümmungsmittelpunkt):
• Der Mittelpunkt M_t des Krümmungskreises heißt **Krümmungsmittelpunkt**.
• Die Koordinaten $(x_M(t), y_M(t))$ von M_t sind gegeben durch:

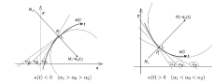
$$x_M(t) = x(t) - \frac{y'(t) + y''(t)}{\kappa(t)}$$

$$y_M(t) = y(t) + \frac{x'(t) - x''(t)}{\kappa(t)}$$

Bemerkung (Krümmungskreis):
Der Krümmungskreis einer Kurve im Punkt P_t ist der Kreis,
• der durch P_t geht,
• dessen Radius gleich dem Krümmungsradius ist: $R(t) = \frac{1}{|\kappa(t)|}$, und
• dessen Mittelpunkt M_t auf der durch P_t gehenden Normalen N_t liegt.



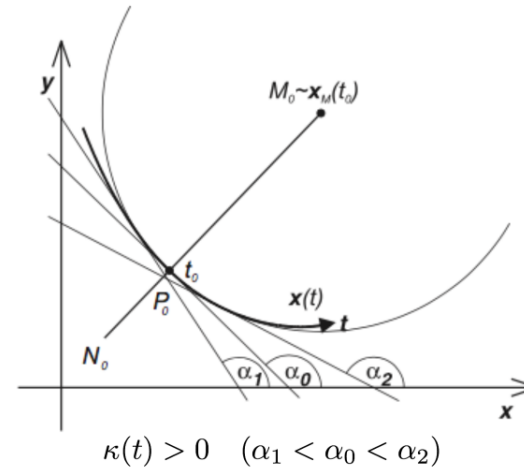
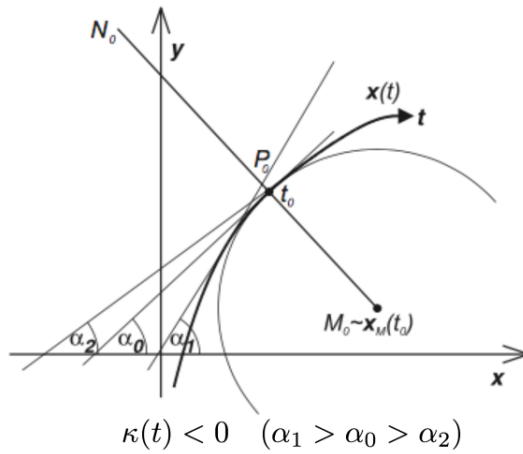
Beobachtungen:
• Entlang der Orientierung der Kurve liegt M_t auf der Normalen N_t rechts bzw. links von P_t , je nachdem ob $\kappa(t) < 0$ oder $\kappa(t) > 0$.
• Von M_t aus in Richtung P_t gesehen, erscheint die Kurve für $t \in I_x(t_0)$ konkav.



Bemerkung (positive und negative Krümmung):

Durch wachsendes t (bzw. wachsende Bogenlänge $s(t)$) ist eine Orientierung der Kurve gegeben.

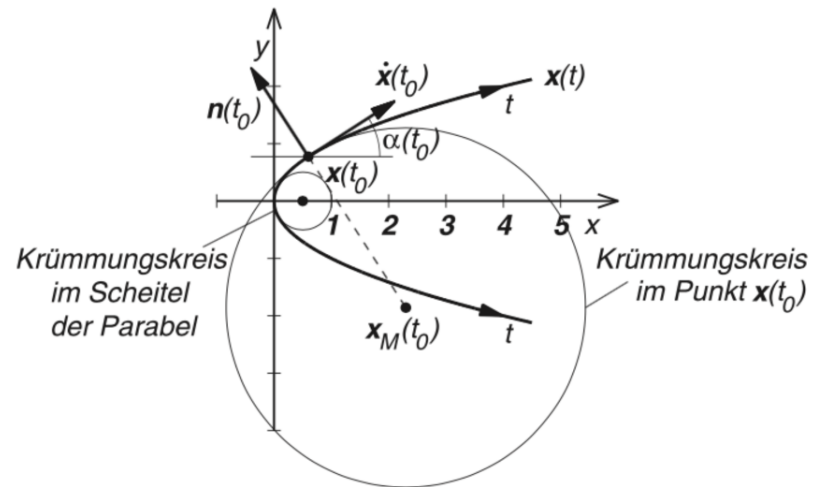
Die Krümmung $\kappa(t)$ ist in einem Punkt $P_0 = (x(t_0), y(t_0))^T$ positiv bzw. negativ, falls der Anstieg $\alpha(t)$ der Tangenten wächst oder fällt.



Bemerkung (Krümmungskreis):

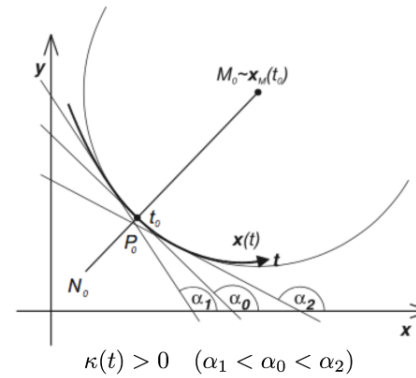
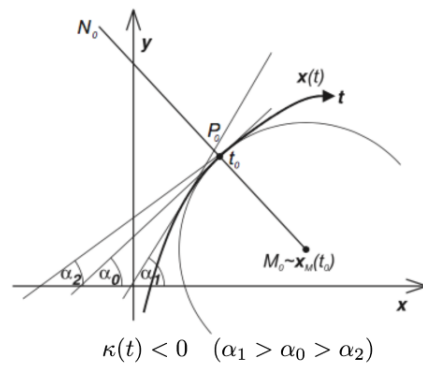
Der **Krümmungskreis** einer Kurve im Punkt P_0 ist der Kreis,

- der durch P_0 geht,
- dessen Radius gleich dem Krümmungsradius ist: $R(t_0) = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$, und
- dessen Mittelpunkt M_0 auf der durch P_0 gehenden Normalen N_0 liegt.



Beobachtungen:

- Entlang der Orientierung der Kurve liegt M_0 auf der Normalen N_0 rechts bzw. links der Kurve, je nachdem ob $\kappa(t_0) < 0$ oder $\kappa(t_0) > 0$.
- Von M_0 aus in Richtung P_0 gesehen, erscheint die Kurve für $t \in U_\delta(t_0)$ konkav.



Bemerkungen (Krümmungsmittelpunkt):

- Der Mittelpunkt M_0 des Krümmungskreises heißt **Krümmungsmittelpunkt**.
- Die Koordinaten $(x_M(t), y_M(t))^T$ von M_0 sind gegeben durch:

$$x_M(t) = x(t) - \dot{y}(t) \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}$$
$$y_M(t) = y(t) + \dot{x}(t) \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}$$



Idee Newton-Verfahren

Bestimmung der Nullstellen (Wurzeln) einer stetigen Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$

Wiederholung: Die Newton-Verfahren benötigt eine stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.
 1. Startwert $x_0 \in D$ wählen.
 2. $f'(x_0) \neq 0$ sein.
 3. f in x_0 differenzierbar sein.
 4. f' in x_0 nicht Null sein.
 5. f' in x_0 nicht Null sein.
 6. f' in x_0 nicht Null sein.



Erinnerung: Fixpunktiteration

Idee: Durch die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die definiert ist durch

$$x_0 \in I, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ist im Falle der Konvergenz bei stetiger Funktion f ein Fixpunkt gegeben.
 Die Folge heißt dann eine Fixpunktfolge.

Satz: (Banachscher Fixpunktsatz in \mathbb{R})

Sei $f: I \rightarrow I$ eine Funktion der $I \subset \mathbb{R}$ in sich abbildet. Weiter gelte für alle $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

mit einer von 0,1 unabhängigen Konstanten $0 < k < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $\xi \in I$ und die durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definierte Iterationsfolge (x_n) konvergiert für jeden beliebigen Anfangswert $x_0 \in I$ gegen diesen Fixpunkt.

Analysis I



Newton-Verfahren

Satz: (Newton-Verfahren)

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $I =]a, b[$ mit $a < b$ definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Weiterhin existiere $R \subset \mathbb{R}$, $0 < R < 1$ mit

$$\left| \frac{f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq R \quad \text{für alle } x \in I$$

und

$$\left| \frac{f(x)}{f'(x)} \right| \leq D < R$$

Dann hat f genau einen Nullstelle ξ in I und die Newton-Folge konvergiert quadratisch gegen ξ , d.h. es gilt

$$|x_{n+1} - \xi| \leq C|x_n - \xi|^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

mit einer Konstanten $C < 8$. Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \xi| \leq \frac{M|x_0 - \xi|^2}{2^n} \quad \text{mit } M = \frac{2R}{1-R}$$

Kurven

Motivation
 Anwendungsgebiete:
 - Physik
 - Biologie
 - Chemie
 - Technik

Definition
 Eine Kurve ist eine Abbildung $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei I ein Intervall in \mathbb{R} ist. Die Abbildung γ heißt Parameterdarstellung der Kurve. Die Kurve selbst ist die Menge aller Punkte $\gamma(t)$ für $t \in I$.

Eigenschaften einer Kurve
 - Stetigkeit
 - Differenzierbarkeit
 - Tangentialvektor
 - Normalevektor

Krümmung einer Kurve

Ausschnitt
 Krümmung = Ableitung von Geraden

Ausschnitt
 Ableitung einer Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

Mechanisch (2D-Kurve)
 Krümmung $\kappa = \frac{1}{R}$

Definition Krümmung
 Die Krümmung κ einer Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ist die Ableitung des Tangentialvektors $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ nach dem Bogenlänge s .

Eigenschaften der Krümmung

Definition Krümmung
 Die Krümmung κ einer Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ist die Ableitung des Tangentialvektors $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ nach dem Bogenlänge s .

Eigenschaften
 - Die Krümmung ist eine Skalarfunktion.
 - Die Krümmung ist positiv für Kurven, die nach oben gebogen sind.
 - Die Krümmung ist negativ für Kurven, die nach unten gebogen sind.