# Analysis Sitzung II

Beweis von $|a| < b \iff -b < a < b$

"$\Rightarrow$": $|a| < b \Rightarrow a < b \land -a < b$

$\Rightarrow a < b \land a > -b$

$\Rightarrow -b < a < b$

"$\Leftarrow$": $-b < a < b \Rightarrow -b < a \land a < b$

$\Rightarrow b > -a \land b > a$

$\Rightarrow b > |a|$ $\boxtimes$

# Modell für Wachstum von Microorganismen

**Beobachtung:** Zunahme von Microorganismen im Zeitintervall
$[t, t+\Delta t]$
ist proportional zur Masse $M_0$ zur Zeit $t$.

Sei $w(t)$ = Masse $M_0$ zur Zeit $t$

**Mathematisch:** $w(t+\Delta t) - w(t) \propto \Delta t \cdot w(t)$

$$\frac{w(t+\Delta t) - w(t)}{\Delta t} = \alpha \cdot w(t) .$$

Das führt zu

$$\underbrace{w'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{w(t+\Delta t) - w(t)}{\Delta t}} = \alpha \cdot w(t)$$

**Fazit:** $w$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\boxed{w'(t) = \alpha \cdot w(t)} \quad *$$

**Anfangsbedingung:** $\boxed{w(t_0) = c_0}$ $**$

**Lösung:** Mit $*$ und $**$ ist $w$ eindeutig bestimmt, die Lösung lautet

$$\boxed{w(t) = c_0 \cdot e^{\alpha(t-t_0)}}$$

## Beispiel zu Funktionen:

Sei $f(x) = x^2 = y$, $D = \mathbb{R}$

injektiv? $\rightarrow$ Nein, denn $x = -1 \neq 1 = x'$

$$f(x) = 1 = f(-x) \qquad (-1)^2 = 1$$
$$(1)^2 = 1$$

surjektiv? $\rightarrow$ Ja, denn zu $y \geq 0$ $\exists\, x \in \mathbb{R} : y = x^2$

$$x = \pm\sqrt{y}$$

bijektiv? $\rightarrow$ Nein, weil nicht injektiv.

---

Sei $f(x) = x^2 = y$, $D = \mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

injektiv? $\rightarrow$ ja, auf $D$ gilt $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

# Umkehrfunktion:

$y = f(x) = x^2 \quad , \quad \mathbb{R}_0^+$

1. Schritt: $y = x^2$ nach $x$ auflösen

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y} \quad , \quad D = \mathbb{R}_0^+$

$\Rightarrow x = +\sqrt{y}$

$\Rightarrow x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

2. Schritt: vertausche $x$ und $y$:

$f^{-1}(x) = \sqrt{x} = y$

Die Umkehrfunktion von $f(x) = x^2$ auf $D = \mathbb{R}_0^+$.