Analysis I / Sitzung III

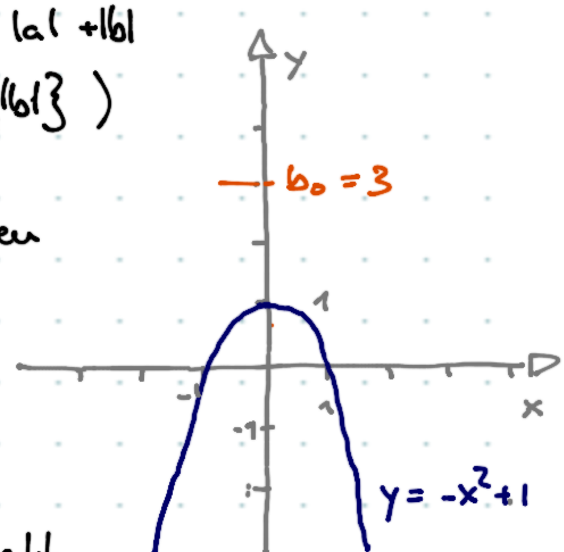
Beschränkte Funktionen:

- $y = |x|$ mit $D = \mathbb{R}$ ist durch $b_u = 0$ nach unten beschränkt.

- In $M = [a, b]$ mit $|a|$ und $|b| < \infty$ ist $y = |x|$ auch nach oben beschränkt, mindestens durch $b_o = |a| + |b|$
  (schärfere obere Schranke: $b_o = \max\{|a|, |b|\}$)

- Die Parabel $y = -x^2 + 1$ ist nach oben beschränkt durch $b_o = 3$

  (schärfere obere Schranke: $b_o = 1$)



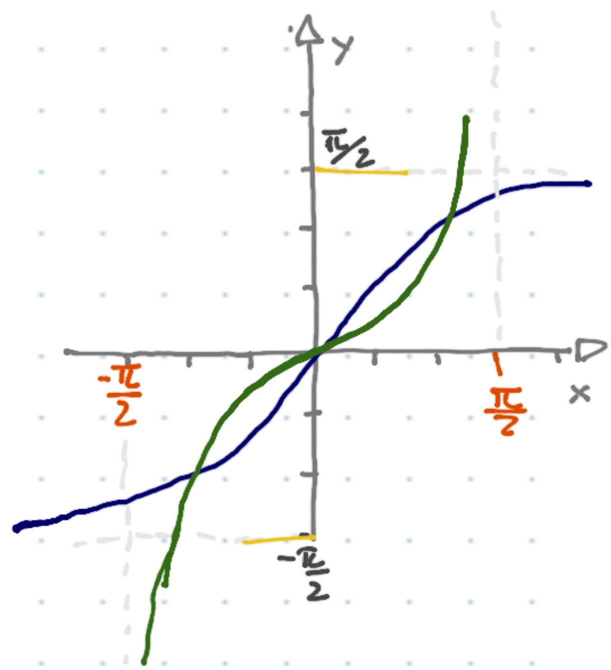
- $y = \arctan x$ ist durch $c = \frac{\pi}{2}$ beschränkt

  $|\arctan x| \leq \frac{\pi}{2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

- $y = \tan x$ ist auf $D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ unbeschränkt.

  Auf $[-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon] = M$ mit $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$

  ist $y = \tan x$ beschränkt
  (egal wie klein ε!)



Monotone Funktionen:

- $y = \arctan x$ ist streng monoton steigend
- $y = x^3$ oder $y = e^x$ sind streng monoton steigend
- $y = \frac{1}{x}$ mit $D =]0, \infty[$ streng monoton fallend.
- $y = c$ ($c \in \mathbb{R}$, konstante Funktion) ist monoton steigend <u>und</u> monoton fallend.

Konvexe Funktion:

Betrachte: $f(x) = x^2$ auf $I = \mathbb{R}$

Behauptung: f ist streng konvex von unten.

Sei $x \neq y \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \,]0,1[$

$$(\alpha x + (1-\alpha)y)^2 = \alpha^2 x^2 + 2\alpha(1-\alpha)xy + (1-\alpha)^2 y^2$$

$$= \alpha^2 x^2 + 2\alpha xy - 2\alpha^2 xy + y^2 - 2\alpha y^2 + \alpha^2 y^2$$

$$= \alpha x^2 \underbrace{- \alpha x^2 + \alpha^2 x^2 + 2\alpha xy - 2\alpha^2 xy - \alpha y^2 + \alpha^2 y^2}_{} + y^2 - \alpha y^2$$

$$= \alpha x^2 - (\alpha - \alpha^2)(x^2 - 2xy + y^2) + (1-\alpha)y^2$$

$$= \alpha x^2 - \alpha(1-\alpha)(x-y)^2 + (1-\alpha)y^2$$

$$< \alpha x^2 + (1-\alpha)y^2 \quad \boxtimes$$

< 0, da $(x-y)^2 \geq 0$, $\alpha \in \,]0,1[$

Behauptung: $f(x) = u(x) + g(x)$, u ungerade, g gerade

$x \in D$, mit D symmetrisch bzg. 0

Wähle: $u(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ und $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

Es gilt: $u(x) + g(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = \dfrac{2f(x)}{2} = f(x)$

Außerdem: $u(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = \dfrac{-f(-x) + f(x)}{2} = -u(-x)$

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(-x)$$

Eigenschaft des Logarithmus:

Zeige: $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

Es gilt: $a^{\log_a(x \cdot y)} = x \cdot y = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)}$

$$= a^{[\log_a(x) + \log_a(y)]}$$

$$\Rightarrow \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$