Analysis I / Sitzung V

① Beweis des Satzes über Nullfolgen:

1. (a_n) Nullfolge $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0 \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0.$

mit $|b_n| \leq |a_n| \Rightarrow$ auch $|b_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge.

2. Beispielhaft $\pm$:

$(a_n), (b_n)$ Nullfolgen $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall n \geq n_1$

$n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall n \geq n_2$

Wähle $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow |a_n \pm b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

sind Nullfolgen

Idee für weiteres Vorgehen für "·", "$(c \cdot a_n)$ ..." :

Falls (a_n) Nullfolge $\Rightarrow (a_n + a_n), (a_n + a_n + a_n) \ldots (n \cdot a_n)$

Nullfolgen

$\boxtimes$

② Stetigkeit:

Bemerkung: Die Aussage des Satzes lässt sich auch wie folgt formulieren:

$$x \in U_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$$