ANALYSIS I / SITZUNG VI

① Beweis Satz von Weierstrass:

a) Beschränktheit: Beweis durch Widerspruch

Erinnerung: $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$

- Annahme: f ist nicht nach oben beschränkt
- Also: zu jedem $n \in \mathbb{N}$ $\exists\, x_n \in [a,b]: f(x_n) > n$
- (x_n) ist eine Folge in $[a,b]$ $\Rightarrow$ beschränkt
- Bolzano-Weierstrass: $\exists$ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \bar{x} \in [a,b]$
- Stetigkeit von f: $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$
- Da aber $f(x_{n_k}) > n_k \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$ $\lightning$ zur Stetigkeit

b) Existenz des Maximums:

- wegen Beschränktheit existiert $s := \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$
- Also: zu jedem $n \in \mathbb{N}$ $\exists\, f(x_n)$: $s - \frac{1}{n} < f(x_n) < s$
- Wir erhalten Folge (x_n) mit $x_n \in [a,b]$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = s$ (*)
- Da (x_n) durch $[a,b]$ beschränkt $\exists$ konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit Grenzwert $\bar{x} \in [a,b]$

- wg. Stetigkeit von f gilt $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$ (**)
- Aus (*) und (**) folgt $f(\bar{x}) = S$
- Also ist $\bar{x}$ Maximalstelle und $f(\bar{x}) = \max f$.

c) Existenz des Minimums folgt analog $\boxtimes$

(2) Ableitung der Funktion $f(x) = x^3$

- Differenzenquotient: $\dfrac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$

$$= \frac{\cancel{x_0^3} + 3x_0^2 \cancel{\Delta x} + 3x_0 \Delta x^{\cancel{2}1} + \Delta x^{\cancel{3}2} - \cancel{x_0^3}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= 3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + \Delta x^2$$

- Ableitung: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} 3x_0^2 + \underbrace{3x_0 \Delta x + \Delta x^2}_{\to 0} = 3x_0^2 = f'(x_0)$

③ Beweis des Satzes:

- Der Diff.quotient $\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$ konvergiert wegen der Diff'barkeit für $x_n \to x_0$ $(n\to\infty)$ gegen $f'(x_0)$.
- Also $f(x_n)-f(x_0) = \dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\cdot(x_n-x_0) \to f'(x_0)\cdot 0 \underset{(n\to\infty)}{=} 0$
- Damit ist f in x_0 stetig nach Def. ☒

④ Einige Nachweise zu Differentiationsregeln:

a) Kettenregel:

- Definiere $f^*(y) := \begin{cases} \dfrac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} & \text{falls } y \neq y_0 \\ f'(y_0) & \text{falls } y = y_0 \end{cases}$
- Da f in $y_0 = g(x_0)$ diff'bar, gilt $\lim\limits_{y\to y_0} f^*(y) = f^*(y_0) = f'(y_0)$
- Außerdem: $f(y)-f(y_0) = f^*(y)\,(y-y_0)$
- Damit:

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x_0)}{x-x_0}$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f^*(g(x))\,(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to x_0} f^*(g(x))}_{f'(g(x_0))}\ \underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{g'(x_0)}$$

b) Umkehrfunktion:

- Es gilt $f(f^{-1}(x)) = x$
- Ableitung mit Kettenregel: $f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$

oder $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

c) sin:

- Diff'quotient: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sin(x_0+\Delta x) - \sin(x_0)}{\Delta x}$
- Limes + Additionstheoreme: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin x_0 \cdot \cos\Delta x + \cos x_0 \cdot \sin\Delta x - \sin x_0}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sin x_0 \frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x_0 \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} \right)$$

- Erinnere $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} = 0$
- Also: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x_0 = \sin' x_0$