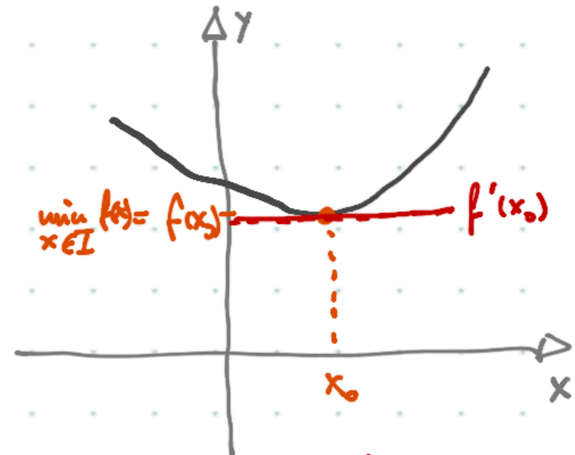
Analysis I / Sitzung VII

① Beweis (Absolute Extremwerte):



Tangente: $t_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

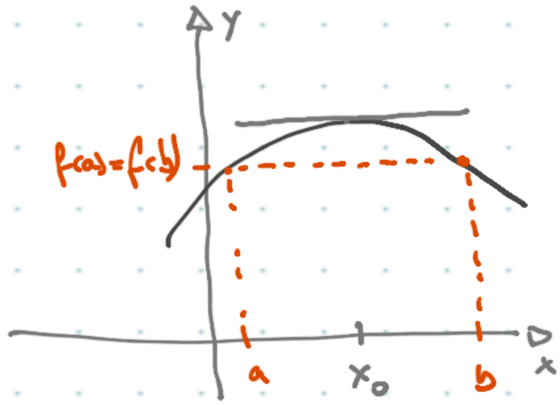
- Sei x_0 ein Punkt an dem f minimal (Beweis f. Max. analog)
- Das heißt: für alle $x \in I$ gilt
  $$f(x) \geq f(x_0)$$
- Nach Vor.: $f'(x_0)$ existiert und
  $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
- Damit gilt für $x < x_0$: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \implies f'(x_0) \leq 0$

  Für $x > x_0$: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \implies f'(x_0) \geq 0$
- Daher folgt insgesamt $f'(x_0) = 0$ ☒

Bem: 1) Notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für Maximalwert.

2) $f(x_0)$ absoluter Extremalpunkt $\implies$ Tangente durch x_0 parallel zur x-Achse.

② **Beweis (Satz von Rolle):**



- Da f stetig auf $[a,b]$, besitzt f nach dem Satz von Weierstrass auf $[a,b]$ sein Max. M und Min. m.
- Falls $M = m$, dann folgt $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a,b[$.
- Falls $m < M$, so wird mindestens einer der Werte im inneren von $]a,b[$ angenommen, da $f(a) = f(b)$
- Damit folgt nach Satz über Extremalwerte $f'(x_0) = 0$ $\boxtimes$

③ Beweis (Mittelwertsatz):

- Führe eine Hilfsfunktion $g(x)$ ein mit
$$g(x) := f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
- Es gilt: $g(a) = g(b) = 0$
- Damit erfüllt g die Voraussetzung des Satzes von Rolle, d.h. es gibt ein $x_0 \in \,]a,b[$ mit $g'(x_0) = 0$
- Differenziation von g: $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- Für x_0 ergibt sich $0 = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\boxtimes$

④ Beweis (Satz von Bernoulli-L'Hospital):

- wir beschränken uns auf den Fall, dass x_0 rechter Randpunkt b ist und
$$\lim_{x\nearrow b} f(x) = \lim_{x\nearrow b} g(x) = 0$$

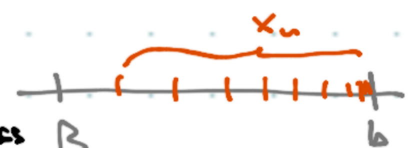
- Setzen wir für $f(x_0) = g(x_0) = 0$, so haben wir mit $f(x)$ und $g(x)$ zwei stetige Funktionen für $x \in U(x_0) \cap I$, d.h. auch in einem offenen Intervall $]\beta, b[$ mit geeignetem $\beta < b$.

- Da $g(x_0) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für $x \in]\beta, b[$ muss (Satz v. Rolle)
$$g(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in]\beta, b[$$

- D.h. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ist für alle $x \in]\beta, b[$ definiert

- Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \in]\beta, b[$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$

- Wende verallg. Mittelwertsatz an:



Zu jedem x_n gibt es ξ_n mit $x_n < \xi_n < b$, sodass
$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{0 - f(x_n)}{0 - g(x_n)} = \frac{f(x_0) - f(x_n)}{g(x_0) - g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \text{ gilt.}$$

- Mit $x_n \to b$ gilt auch $\xi_n \to b$.

- und wegen der Existenz von $\lim\limits_{x\nearrow b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ folgt die Behauptung ☒

(5) Zur stetigen Differenzierbarkeit:

- Gegenbeispiel: $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

- Für die Ableitung gilt: $\underline{x = 0}$:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x^2} = 0$$

- $\underline{x \neq 0}$: $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x^2} + x^2 \left(-\sin \frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{2}{x^2}\right)$

$$= 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}$$

- Insgesamt:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- Damit: $\lim_{x \to 0} f'(x)$ existiert nicht!

- D.h. die Ableitung ist in $x = 0$ nicht stetig.