Analysis I / Sitzung VIII

① Beweis des Satzes von Horner:

Idee: Berechne direkt $p(x) = (x-x_0)g(x) + b_0$

$$\boxed{(x-x_0)g(x) + b_0} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} x^{k+1} - x_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} x^k + b_0$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_k x^k - x_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} x^k + b_0 \quad \Big| \; b_0 = b_0 x^0$$

$$= a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k - x_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} x^k$$

$$= a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - x_0 b_{k+1}) x^k$$

$$= a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = \boxed{p(x)} \quad \boxtimes$$

② Beweis des Satzes von Taylor:

- Sei $p \in \{1, 2, \dots, k+1\}$ beliebig aber fest gewählt.

a) Falls $x = x_0 \Rightarrow R_n(x_0) = 0$ und $f(x) = f(x_0)$, damit gilt der Satz.

b) Sei also $x \neq x_0$

- $x \in I$, bestimme $c_x \in \mathbb{R}$:

$$(1) \quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + c_x(x-x_0)^p$$

- Ersetze x_0 durch z und halte x und c_x fest, definiere

$$(2) \quad F(z) = f(z) + \frac{f'(z)}{1!}(x-z)^1 + \dots \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n + c_x(x-z)^p$$

- Es gilt $F(x) = f(x)$ und $F(x_0) = f(x) \Rightarrow F(x) = F(x_0)$

- Satz von Rolle $\Rightarrow \exists\, \xi$ zwischen x und x_0: $F'(\xi) = 0$

- Aus (2) erhält man

$$F'(z) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n + c_x\, p\,(x-z)^{p-1}$$

- Da $F'(\xi) = 0 \Rightarrow \quad c_x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\, p}(x-\xi)^{n+1-p}$

- Einsetzen in (1) $\Rightarrow \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\, p}(x-x_0)^p(x-\xi)^{n+1-p}$ ⊠

③ Mc Laurin-Formel für $f(x)=e^x$

- $f^{(k)}(x) = e^x \quad ; \quad f^{(k)}(0) = 1$
- Taylor-Polynom : $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$
- Restglied :
$$
\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} \right| \cdot |x|^{n+1} \\
&= \frac{e^{|\theta x|}}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} \\
&\leq \frac{e^{\theta |x|}}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} \\
&< \underbrace{\frac{e^{|x|}}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1}}_{\text{unabh. von } \theta} \qquad (*)
\end{aligned}
$$

- Für x fest konvergiert (*) gegen 0 $\quad (n \to \infty)$

  Es existiert immer ein $p \in \mathbb{N}$: $p-1 \leq |x| < p$

$$
\frac{n!}{|x|^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) \cdot p \cdot \dots \cdot n}{|x| \cdot |x| \cdot \dots \cdot |x|} \geq \frac{(p-1)!}{|x|^{p-1}} \cdot \left(\frac{p}{|x|} \right)^{n-(p-1)} \xrightarrow[(n \to \infty)]{} \infty
$$

- Also $\frac{|x|^n}{n!} \to 0 \quad (\text{für } n \to \infty)$