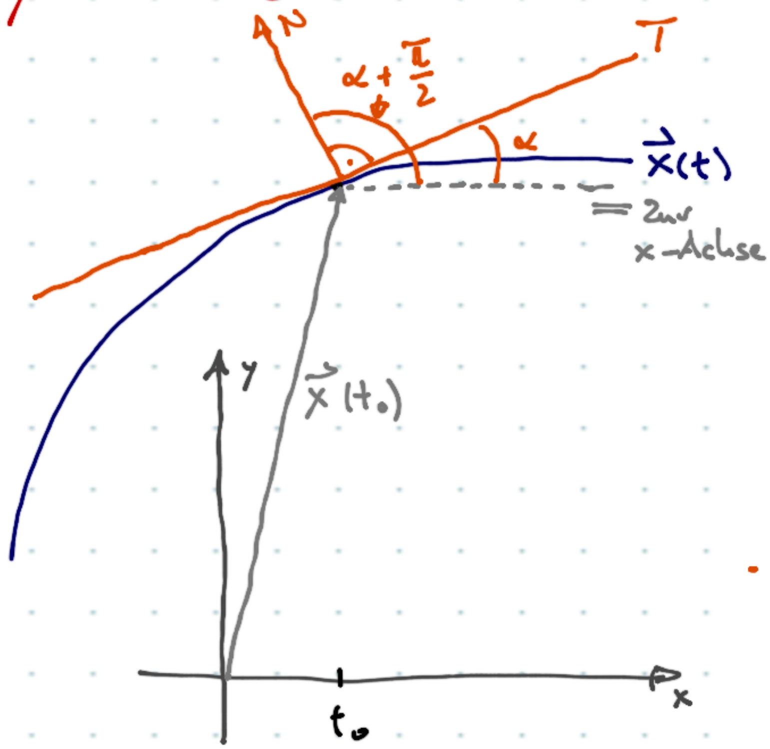
Analysis I / Sitzung X



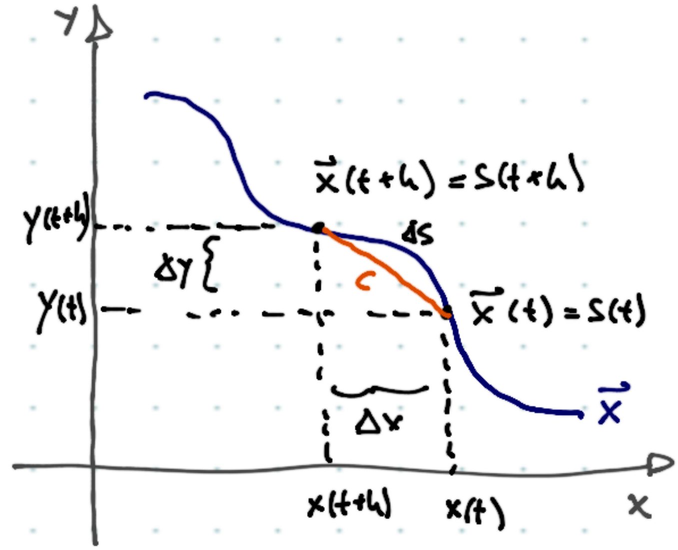
① Tangente und Normale:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Anstieg von T in der x-y-Ebene: $\tan \alpha$

Anstieg von N in der x-y-Ebene: $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

② Bogenlänge einer Kurve:



Sekante

$$c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Länge des Bogenstückes

$$\Delta s \neq c$$

$c \approx \Delta s$ falls $h \to 0$ also $S(t) \to S(t+h)$

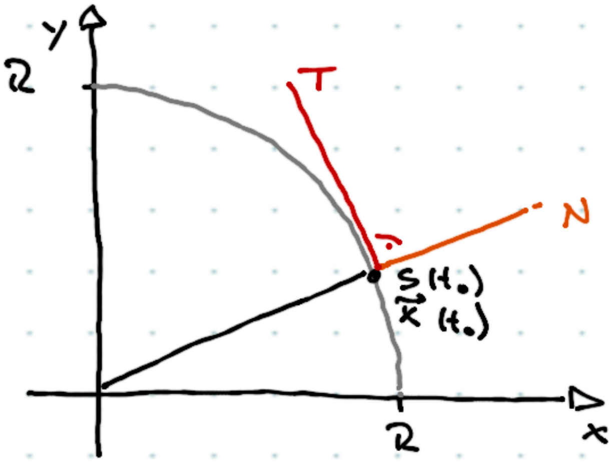
$$\frac{ds}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \sqrt{\left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right)^2 + \left(\frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right)^2 + \left(\lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$$

Beispiel: Viertelkreisbogen



gegeben in Parameterform:

$$\vec{x}(t) = \left\{ \begin{matrix} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{matrix} \right\} \; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

• Differential der Bogenlänge:

$$ds = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}\; dt = R\, dt$$

• Tangentenvektor:

$$\dot{\vec{x}}(t_0) = \begin{pmatrix} -R\sin(t_0) \\ R\cos(t_0) \end{pmatrix} = T$$

• Normalenvektor

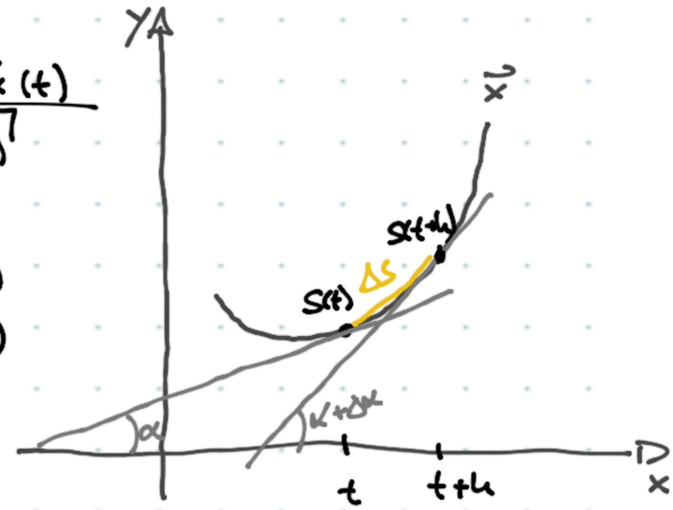
$$\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} -R\cos(t_0) \\ -R\sin(t_0) \end{pmatrix} = N$$

• Gleichungen für T und N:

$$T: \quad x\cos t_0 + y\sin t_0 = R$$

$$N: \quad -x\sin t_0 + y\cos t_0 = 0$$

③ Zeige: $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}$



Für $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ gilt: $\underbrace{\tan(\alpha) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}}_{①}$

Differenziere ① nach s (auf beiden Seiten):

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{[\dot{x}(t)]^2} \frac{dt}{ds} \quad ②$$

Nun ist: $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2} = \frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ ③

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \quad ④$$

Setze ③ und ④ in ① ein und erhalte:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\sqrt{\left[\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\right]^3}} \quad \boxtimes$$