Analysis I / Sitzung XI

① $\mathbb{C}$ als Zahlenkörper:

Betrachte "+":

- Assoziativ: $(a_1, b_1) + [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)]$

$$= (a_1, b_1) + [(a_2 + a_3, b_2 + b_3)]$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3)$$
$$= [(a_1 + a_2, b_1 + b_2)] + (a_3, b_3)$$
$$= [(a_1, b_1) + (a_2, b_2)] + (a_3, b_3)$$

- Kommutativ: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_2, b_2) + (a_1, b_1)$
- Nullelement: $(0, 0)$
- Negatives: $-(a, b)$ ist negatives Element zu (a, b)

Betrachte "·":

- Assoziativ: $(a_1, b_1) \cdot [(a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)] = [(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)] \cdot (a_3, b_3)$
- Kommutativ: $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1)$

• Einselement: $(a,b)\cdot(1,0) = (a,b)$

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$$
$$\Rightarrow (a,b)\cdot(1,0) = (a\cdot 1 - b\cdot 0,\ a\cdot 0 + b\cdot 1) = (a,b)$$

• Inverses: Es soll gelten $(a,b)\cdot(x,y) = (1,0)$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{array}\right\}$$ lin. Gleichungssystem (2×2)

Annahme: $b \neq 0$: $x = -\frac{a}{b}y \xRightarrow{2.\text{ Gleich.}} \left(-\frac{a^2}{b} - b\right)y = 1$

$$\Rightarrow y = -\frac{b}{a^2+b^2},\quad x = \frac{a}{a^2+b^2}$$

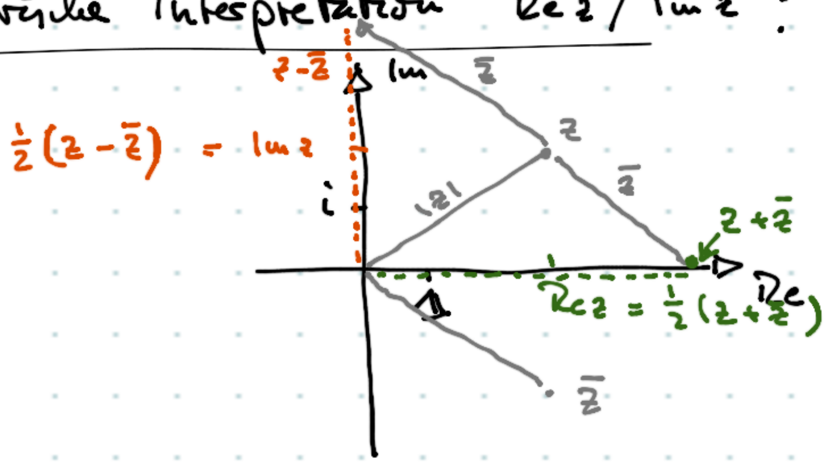
Falls $a \neq 0$: $(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

falls $(a,b) \neq (0,0)$

Betrachte "+ ·":

• Distributiv: $[(a_1,b_1) + (a_2,b_2)]\cdot(a_3,b_3) = (a_1,b_1)\cdot(a_3,b_3) + (a_2,b_2)\cdot(a_3,b_3)$

② Geometrische Interpretation Re z / Im z:

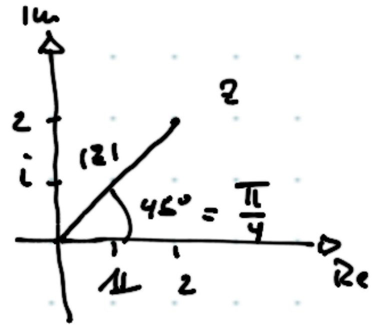


(3) Potenzen/Wurzeln:

Beispiel: $z = 2 + i2$, gesucht: $z^{12} = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{12\text{-mal}}$

zu mühsam ☹

Idee: Bemühe die Exponentialschreibweise



$$z = |z| e^{i\varphi} = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad |z| = \sqrt{8}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Damit:
$$z^{12} = \left(\sqrt{8} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{12}$$
$$= (\sqrt{8})^{12} \cdot \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{12}$$
$$= 8^6 \cdot e^{i3\pi} = 8^6 \left(\overbrace{\cos 3\pi}^{-1} + i \overbrace{\sin 3\pi}^{0}\right)$$
$$= -8^6 = -2^{18}$$

Wurzel: $z^3 = w = -3 + i\sqrt{3}$

Exponentialdarstellung: $|w| = \sqrt{12}$, $\varphi = \frac{5\pi}{6} = \operatorname{Arg} z$

Schreibe: $w = \sqrt{12} \cdot e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)}$

Definition $a \in \mathbb{C}$ heißt n-te Wurzel von $b \in \mathbb{C}$, falls $a^n = b$.

Schreibe $a = \sqrt[n]{b}$

Jetzt: $z_k = (a)^{\frac{1}{3}} \left(e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)}\right)^{1/3} = 12^{1/3} e^{i\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

z ist Lösung von $z_k^3 = w$

Nun ist $z_0 = z_3 = z_6 = \cdots$

$z_1 = z_4 = z_7 = \cdots$

$z_2 = z_5 = z_8 = \cdots$

Also gilt: Es gibt drei Lösungen z_0, z_1 und z_2 zu $z^3 = w$.