Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2007**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 5:

a) Man bestimme für folgende Funktionenreihen den maximalen Konvergenzbereich und untersuche welche Art von Konvergenz (punktweise, gleichmäßige) vorliegt.

(i) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k \cdot x^4}{(3+x^4)^k}$

(ii) $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)^4\sqrt{2+3kx}}$

b) Man zeige, dass für $x \in \left]-\frac{1}{2}, \infty\right[$

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{(2x+k^2)(2x+k^2+2k+1)}$$

gleichmäßig gegen $h(x) = \frac{1}{2x+1}$ konvergiert.

Aufgabe 6:

Man bestimme die Konvergenzradien und Konvergenzintervalle der folgenden Reihen

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(10x)^n}{\sqrt{n}}$,

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{3^n(n+1)\sqrt{n+1}}$,

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n+1}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$,

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten der Konvergenzintervalle.

Aufgabe 7:

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{7}{6-5x}$ definierte Funktion.

a) Man zeichne die Funktion f.

b) Man beweise über vollständige Induktion, dass für $k \geq 0$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \frac{7 \cdot 5^k \cdot k!}{(6-5x)^{k+1}}.$$

c) Man berechne die Taylorreihe von f allgemein zum Entwicklungspunkt $x_0 \neq \dfrac{6}{5}$ und bestimme den Konvergenzradius.

d) Welche Konvergenzintervalle ergeben sich für $x_0 = 1$ und $x_0 = 2$? Liegt Konvergenz in den Randpunkten vor?

e) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe für f zum Entwicklungspunkt $z_0 = i$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Aufgabe 8:

Man berechne für die Funktion

$$f(x) = \frac{3}{4-x^2}$$

Potenzreihenentwicklungen um den Nullpunkt unter Verwendung

a) der Summenformel der geometrischen Reihe,

b) des Cauchyproduktes für Reihen

und bestimme deren Konvergenzradius. Konvergiert die berechnete Potenzreihe in den Randpunkten des Konvergenzintervalls?

Abgabetermin: 23.4. - 26.4. (zu Beginn der Übung)