
Analysis II für
Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Armin Iske

Department Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Sommersemester 2007

Informationsquellen.

- **Internetseiten.**

www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/

- **Vorlesung.**

Montag, 09:45-11:15, SBS95, Audimax 1, ab 02.04.2007.

- **Übungen in Tutorgruppen.**

Dr. Kai Rothe und Übungsgruppenleiter(innen), ab 2. Woche.

- **Anleitung zu den Übungen.**

Dr. Kai Rothe.

- **Sprechstunde.**

– **Prof. Iske:** Montag, 11:30-12:30 Uhr, SBS95, 2073.

– **Dr. Rothe:** Mo, 16:00-17:00 (23.04., 7.5., 21.5., 4.6., 18.6., 2.7.)

Di, 14:30-15:30 (3.4., 17.4., 15.5., 29.5., 12.6., 26.6., 10.7.)

- **Klausureinsicht Analysis I.**

wird bekanntgegeben.

Literaturquellen.

PRIMÄR:

- R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure 1, 3. Auflage. WILEY-VCH, Berlin, 2000.
- H. J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar: Mathematik für Ingenieure, Band 3: Aufgaben und Lösungen. WILEY-VCH, Berlin, 2000.

SEKUNDÄR:

- K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik, Bände 1 und 2. Springer, Berlin.
- K. Burg, H. Haf, F. Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure, Band 1: Analysis. B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

Inhalte Analysis II.

- Gleichmäßige Konvergenz.
- Potenzreihen.
- Elementare Funktionen.
- Interpolation.
- Integration.
- Kurven und Kurvenintegrale.
- Numerische Quadratur.
- Extrapolation.
- Periodische Funktionen, Fourier-Reihen.
- Schnelle Fourier-Transformation (FFT).

7 Potenzreihen und elementare Funktionen

7.1 Gleichmäßige Konvergenz

Definition: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, mit $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ für $D \subset \mathbb{C}^m$, eine Funktionenfolge.
Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

- **punktweise** gegen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z), \quad \text{für alle } z \in D.$$

- **gleichmäßig** gegen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

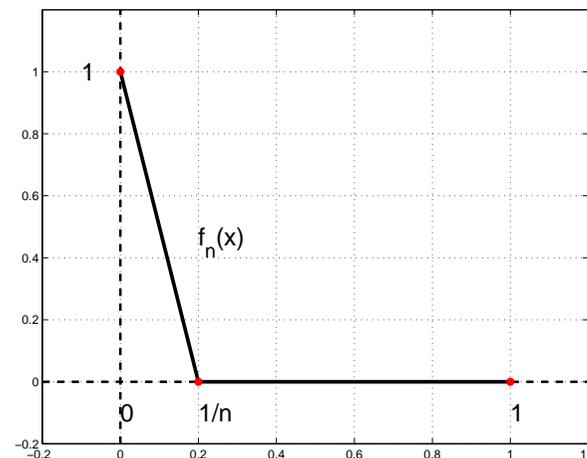
□

Bemerkung: Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz.
Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

□

Gegenbeispiel. Betrachte die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stetiger Funktionen mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{für } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{für } 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$



Der Graph von $f_n(x)$.

Die Folge konvergiert *punktweise* gegen die *unstetige* Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Allerdings konvergiert $(f_n)_n$ *nicht* gleichmäßig gegen f , denn es gilt

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Satz: Falls eine Folge $(f_n)_n$ stetiger Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, gleichmäßig auf D gegen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert, so ist f stetig auf D .

Beweis: Zeige die Stetigkeit von f in $z_0 \in D$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben und n hinreichend groß, so dass

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/3.$$

Wähle $\delta > 0$ hinreichend klein, so dass

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \varepsilon/3 \quad \text{für alle } \|z - z_0\| < \delta.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $z \in D$ mit $\|z - z_0\| < \delta$. ■

Das Majorantenkriterium von Weierstraß.

Satz: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Funktionenfolge mit $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, und gelte

$$|f_n(z)| \leq b_n \text{ für alle } z \in D \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$$

für eine reelle Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Dann ist die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad \text{für } z \in D,$$

gleichmäßig und absolut konvergent auf D .

Beweis: Punktweise und absolute Konvergenz folgen aus dem Majorantenkriterium für Reihen. Die gleichmäßige Konvergenz folgt mit

$$\left| \sum_{n=0}^m f_n(z) - f(z) \right| \leq \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n < \varepsilon$$

und dem Cauchy-Konvergenzkriterium für unendliche Reihen. ■

Folgerung: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge stetiger Funktionen mit $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, so dass

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad \text{für } z \in D,$$

gleichmässig konvergiert auf D . Dann ist f stetig auf D . □

Vertauschbarkeit Differentiation und Summation.

Satz: Sei $(f_n)_n$ eine Folge differenzierbarer Funktionen $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{und} \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x), \quad \text{für } x \in (a, b),$$

gleichmäßig konvergent auf (a, b) sind. Dann ist die Funktion f differenzierbar auf (a, b) , und es gilt $f' = g$, d.h.

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

□

7.2 Potenzreihen

Definition: *Eine Reihe der Form*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

heißt **(komplexe) Potenzreihe** zum Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. □

Beispiel: Die (komplexe) Exponentialfunktion ist definiert durch die Potenzreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Weiterhin: Elementare Funktionen sind über Potenzreihen definiert:

$$\log(z), \cos(z), \sin(z), \dots$$

Taylor-Reihenentwicklung.

Betrachte für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$, die **Taylor-Reihe**

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{mit } x_0, x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkungen.

- Die Taylor-Reihe einer C^∞ -Funktion ist im Allgemeinen **nicht konvergent**.
- Konvergiert die Taylor-Reihe $T(x)$, so nicht notwendigerweise gegen $f(x)$.
- Falls

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

so nennt man die Funktion f **reell-analytisch**. □

Konvergenzradius einer Potenzreihe.

Satz: Zu jeder Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

gibt es eine Zahl $r \geq 0$ mit den Eigenschaften

$$|z - z_0| < r \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{absolut konvergent}$$

$$|z - z_0| > r \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{divergent}$$

Die Zahl $r \geq 0$ heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

Die Potenzreihe konvergiert für alle ρ mit $0 \leq \rho < r$ auf

$$\overline{K_\rho(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \rho\}$$

sogar **gleichmäßig**.

Beweis: Definiere

$$r := \sup \left\{ |w| : \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k \text{ konvergent} \right\}$$

- Dann gilt $0 \leq r \leq \infty$ und für $|z - z_0| > r$ ist die Potenzreihe **divergent**.
- Gilt $r = 0$, so ist die Potenzreihe nur für $z = z_0$ (absolut) **konvergent**.
- Sei nun $r > 0$ und $0 < \rho < r$. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > \rho$, so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$$

konvergiert. Insbesondere ist die Folge $(a_k w^k)_{k \geq 0}$ beschränkt, d.h. es gibt eine Schranke $M > 0$ mit

$$|a_k w^k| \leq M \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \leq \rho < |w|$ gilt somit

$$|a_k(z - z_0)^k| = |a_k w^k| \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k \leq M \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k$$

und weiterhin

$$\left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k \leq \left| \frac{z - z_0}{w} \right| < 1 \quad \text{für alle } k \geq 1,$$

so dass die **geometrische Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k$$

konvergiert. Mit dem Majorantenkriterium von Weierstraß konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

absolut und gleichmäßig für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \leq \rho$. ■

Die Formel von Cauchy-Hadamard.

Satz: Den Konvergenzradius $r \geq 0$ einer Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

kann man mit der **Formel von Cauchy-Hadamard** berechnen:

$$r = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Beweis: Verwende hierzu das Wurzelkriterium, zusammen mit der Äquivalenz

$$\begin{aligned} \forall k \geq k_0 : \sqrt[k]{|a_k (z - z_0)^k|} \leq q < 1 &\iff \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k (z - z_0)^k|} < 1 \\ &\iff \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} |z - z_0| < 1 \\ &\iff |z - z_0| < \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Konvergenz von Potenzreihen.

Satz: Für eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ gelten folgende Aussagen.

(a) Falls einer der beiden Grenzwerte

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \quad \text{oder} \quad r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

existiert (oder falls $r = \infty$), so stimmt dieser Grenzwert mit dem Konvergenzradius der Potenzreihe überein.

(b) Differenziert man die Potenzreihe, so erhält man wiederum eine Potenzreihe,

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1},$$

deren Konvergenzradius mit dem Konvergenzradius r der Ausgangsreihe übereinstimmt, auch im Fall $r = 0$ oder $r = \infty$.

Beweis: Der erste Teil von (a) folgt aus der Formel von Cauchy-Hadamard.

Verwende für den zweiten Teil von (a) das Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{a_{k+1}(z - z_0)^{k+1}}{a_k(z - z_0)^k} \right| < 1 \iff |z - z_0| \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

und somit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}(z - z_0)^{k+1}}{a_k(z - z_0)^k} \right| < 1 \iff |z - z_0| < \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$



Zu Teil (b): Berechne den Konvergenzradius mit Cauchy-Hadamard, womit

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

wegen $\sqrt[k]{k} \rightarrow 1$ für $k \rightarrow \infty$. Somit sind die Konvergenzradien der beiden Potenzreihen identisch.



Beispiele.

- Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k!z^k$ konvergiert nur für $z = 0$, denn $(k!z^k)_{k \geq 0}$ ist für $z \neq 0$ keine Nullfolge. Der Konvergenzradius ist in diesem Fall $r = 0$.
- Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ hat den Konvergenzradius $r = 1$.
- Die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ hat den Konvergenzradius $r = \infty$.
- Aus der Differentiation der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ergibt sich:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots \quad \text{für } |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} = \frac{1}{2} (2 + 6z + 12z^2 + \dots) \quad \text{für } |z| < 1$$

Potenzreihenentwicklung des Logarithmus.

- **Beachte:** Die **integrierte Potenzreihe**

$$C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$$

besitzt den gleichen Konvergenzradius wie die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

- **Anwendung:** Die Integration der Potenzreihe

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \quad \text{für } |z| < 1.$$

liefert eine **Potenzreihenentwicklung der Logarithmusfunktion**

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad \text{für } -1 < x < 1.$$

Potenzreihenentwicklung von \arctan .

- **Weitere Anwendung:** Integration der Potenzreihe

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad \text{für } -1 < x < 1$$

liefert Potenzreihenentwicklung

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad \text{für } -1 < x < 1.$$

Bemerkungen:

- Eine Potenzreihe ist innerhalb ihres Konvergenzkreises $K_r(z_0)$ stetig.
- Reelle Potenzreihen sind C^∞ -Funktionen auf $(x_0 - r, x_0 + r)$.
- Eine reelle Potenzreihe stimmt mit einer **Taylor-Reihe** überein:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{für } |x - x_0| < r$$

Identitätssatz und Abelscher Grenzwertsatz.

- **Identitätssatz für Potenzreihen:** Sind

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

reelle Potenzreihen, die in einem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ die gleiche Funktion darstellen, so gilt

$$a_k = b_k \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

- **Abelscher Grenzwertsatz:** Reelle Potenzreihen der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

sind überall dort stetig, wo sie konvergieren, insbesondere in den Randpunkten ihres Konvergenzintervalls. □

Beispiel.

Die Reihe

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad \text{für } -1 < x < 1$$

konvergiert auch für $x = +1$. Somit ist nach dem Abelschen Grenzwertsatz insbesondere die Gleichung

$$\log(1+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} 1^{k+1}$$

gültig. Daraus folgt die Darstellung

$$\log(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

□