9 Integration

9.1 Das bestimmte Integral

Sei $f : [a, b] \to R$ eine *beschränkte* Funktion auf einem Kompaktum $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definition: *Eine Menge der Form*

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

nennt man eine **Zerlegung** *(Partition, Unterteilung) des Intervalls* $[a, b]$*.*

Die **Feinheit** *der Zerlegung* Z *ist dabei definiert durch*

$$\|Z\| = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$$

Man bezeichnet mit $\mathbf{Z}$ *bzw.* $\mathbf{Z}[a, b]$ *die Menge aller Zerlegungen von* $[a, b]$*.* $\square$

Riemannsche Summen.

Definition: *Jede Summe der Form*

$$R_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad \textit{für } x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$$

nennt man eine Riemannsche Summe *der Zerlegung Z,*

$$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf f([x_i, x_{i+1}])\ (x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die Untersumme *von* $f(x)$ *zur Zerlegung Z,*

$$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup f([x_i, x_{i+1}])\ (x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die Obersumme *von* $f(x)$ *zur Zerlegung Z.* □

Eigenschaften von Riemannschen Summen.

Beobachtung: Aus den Definitionen folgt direkt:

- Für eine *feste* Zerlegung Z gilt stets

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

- Ist Z_1 eine *feinere* Zerlegung als Z_2, d.h. $Z_2 \subset Z_1$, dann gilt

$$U_f(Z_2) \leq U_f(Z_1) \quad \text{und} \quad O_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

- Für zwei *beliebige* Zerlegungen Z_1 und Z_2 gilt daher stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

und

$$U_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

$\square$

Das Riemannsche Integral.

Beobachtung: Es existieren die Grenzwerte (über immer feinere Zerlegungen):

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx \quad := \quad \sup\{U_f(Z) \;:\; Z \in \mathbf{Z}[a,b]\} \qquad (\texttt{Unterintegral})$$

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx \quad := \quad \inf\{O_f(Z) \;:\; Z \in \mathbf{Z}[a,b]\} \qquad (\texttt{Oberintegral})$$

Definition: *Eine Funktion* $f(x)$ *heißt* `(Riemann-)integrierbar` *über* $[a,b]$, *falls Unter- und Oberintegral übereinstimmen, d.h.*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx.$$

In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

das `(Riemann-)Integral` *von* $f(x)$ *über* $[a,b]$. □

Beispiele. Die konstante Funktion $f(x) \equiv c$ ist integrierbar, denn

$$U_f(Z) = O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} c\,(x_{i+1} - x_i) = c\,(b-a)$$

und somit

$$\int_a^b f(x)\,dx = c\,(b-a).$$

- Für $f(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$, und $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$ gilt

$$\begin{aligned} U_f(Z_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \\ O_f(Z_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

somit

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Weitere Beispiele.

- Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & : \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann gilt für **jede** Zerlegung: $U_f(Z) = 0$, aber $O_f(Z) = 1$.

Somit ist die Funktion f **nicht** integrierbar.

- Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \neq c \\ 1 & : \quad x = c \end{cases}$$

für $a \leq c \leq b$. Dann ist die Funktion f integrierbar mit

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0,$$

denn es gilt

$$U_f(Z) = 0 \quad \text{und} \quad 0 < O_f(Z) \leq 2\|Z\|.$$

Satz: *Seien* $f(x)$ *und* $g(x)$ *integrierbar auf* $[a, b]$. *Dann gilt:*

(a) *Für* $a \leq c \leq b$ *ist* f *auf* $[a, b]$ *integrierbar, genau dann wenn* f *auf* $[a, c]$ *und auf* $[c, b]$ *integrierbar ist, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

(b) Linearität*: Mit* f *und* g *ist auch* $\alpha f(x) + \beta g(x)$ *für* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *integrierbar:*

$$\int_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

(c) Positivität*: Falls* $f(x) \geq 0$ *für alle* $x \in [a, b]$, *so gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

(d) Monotonie*: Falls* $f(x) \leq g(x)$ *für alle* $x \in [a, b]$, *so gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Standardabschätzungen.

Satz: *Sei* f *integrierbar über* $[a, b]$*. Dann gelten die Abschätzungen*

$$(b-a) \cdot \inf(f[a,b]) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a) \cdot \sup(f[a,b]).$$

und weiterhin

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq (b-a) \cdot \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$$

Falls $|f(x)|$ *integrierbar ist, so gilt*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Beweis: Für die Zerlegung $Z = \{a, b\}$ von $[a, b]$ folgt sofort

$$\inf(f[a, b]) \cdot (b - a) = U_f(Z) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq O_f(Z) = \sup(f[a, b]) \cdot (b - a)$$

Weiterhin folgt wegen $\pm f(x) \leq |f(x)|$, für alle $x \in [a, b]$, die Ungleichung

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^{\underline{b}} |f(x)|\, dx \leq O_{|f|}(Z) = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} \cdot (b - a).$$

■

Bemerkung: Die obige Abschätzung

$$\inf(f[a, b]) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx$$

liefert insbesondere die Positivität des Integrals. □

Weitere Bemerkungen.

- Die Aussage
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$
gilt für beliebige Anordnungen von a, b, c.
Wir definieren daher
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$
sowie
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

- Ist $f(x)$ integrierbar, so gilt
$$R_f(Z_m) \to \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{für } m \to \infty$$
für alle Zerlegungsfolgen $\{Z_m\}_m \subset \mathbf{Z}[a, b]$ mit $\|Z_m\| \to 0$ für $m \to \infty$. $\square$

9.2 Kriterien für Integrierbarkeit

Satz: (Riemannsches Kriterium)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine beschränkte Funktion. Dann sind äquivalent:*

(a) $f(x)$ *ist integrierbar über* $[a, b]$.

(b) Für alle $\varepsilon > 0$ *gibt es eine Zerlegung* $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ *mit* $O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$.

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ mit

$$0 \leq O_f(Z) - \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx < \varepsilon/2,$$

$$0 \leq \int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx - U_f(Z) < \varepsilon/2.$$

$(a) \Rightarrow (b)$: Folgt aus der Addition der beiden Ungleichungen.
$(b) \Rightarrow (a)$: Die Integrierbarkeit von f folgt direkt aus (b) mit

$$0 \leq \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx - \int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx \leq O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Monotone Funktionen sind integrierbar.

Satz: *Eine beschränkte monotone Funktion* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist integrierbar.*

Beweis: Für eine uniforme Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a,b]$ mit

$$x_j = a + \frac{j}{n}(b-a), \qquad 0 \le j \le n,$$

und für f monoton wachsend gilt

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{j=0}^{n-1} (f(x_{j+1}) - f(x_j))(x_{j+1} - x_j) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

für hinreichend großes n. Nach dem Riemannschem Kriterium ist f integrierbar.

Analog zeigt man die Integrierbarkeit für f monoton fallend. $\blacksquare$

Stetige Funktionen sind integrierbar.

Satz: *Eine beschränkte stetige Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist integrierbar.*

Beweis: f ist sogar gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum $[a, b]$. Daher gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Für eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ mit Feinheit $\|Z\| < \delta$ gilt dann

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{j=0}^{n-1} (\sup f[x_j, x_{j+1}] - \inf f[x_j, x_{j+1}]) \cdot (x_{j+1} - x_j) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot (x_{j+1} - x_j) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist f nach dem Riemannschem Kriterium integrierbar. ■

Satz: *Seien* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbare beschränkte Funktionen. Dann gilt:*

(a) Das Produkt $f(x) \cdot g(x)$ *ist integrierbar über* $[a, b]$.

(b) Gilt $g(x) \geq C > 0$, *so ist der Quotient* $f(x)/g(x)$ *integrierbar über* $[a, b]$.

Beweis: (a): Für eine feste Zerlegung $Z = \{x_j\}_{j=0}^{n} \in \mathbf{Z}[a, b]$ gilt

$$\begin{aligned} s_j &:= \sup(f \cdot g)[x_j, x_{j+1}] - \inf(f \cdot g)[x_j, x_{j+1}] \\ &= \sup_{x,y}(f(x)g(x) - f(y)g(y)) \\ &= \sup_{x,y}(f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)) \\ &\leq \|f\|_\infty \sup_{x,y}(g(x) - g(y)) + \|g\|_\infty \sup_{x,y}(f(x) - f(y)) \end{aligned}$$

und somit

$$O_{f \cdot g} - U_{f \cdot g} \leq \|f\|_\infty (O_g - U_g) + \|g\|_\infty (O_f - U_f),$$

womit die Integrierbarkeit von $f \cdot g$ mit dem Riemannschen Kriterium folgt.

■

Beweis von (b): Für eine feste Zerlegung $Z = \{x_j\}_{j=0}^n \in \mathbf{Z}[a, b]$ gilt

$$\begin{aligned} s_j &:= \sup\left(\frac{1}{g}\right)[x_j, x_{j+1}] - \inf\left(\frac{1}{g}\right)[x_j, x_{j+1}] \\ &= \sup_{x,y}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right) \\ &= \sup_{x,y}\frac{g(y)-g(x)}{g(x)\cdot g(y)} \\ &\leq \frac{1}{C^2}\cdot\sup_{x,y}(g(y)-g(x)) \end{aligned}$$

und somit

$$O_{1/g} - U_{1/g} \leq \frac{1}{C^2}\cdot(O_g - U_g),$$

womit die Integrierbarkeit von $1/g$ mit dem Riemannschen Kriterium folgt.

Insgesamt folgt mit (a) die Integrierbarkeit von f/g. ∎

Spezialfälle integrierbarer Funktionen.

Satz: *Sei* f *integrierbar über* $[a, b]$. *Dann sind folgende Funktionen integrierbar.*

$$|f|(x) \quad := \quad |f(x)|$$

$$f^+(x) \quad := \quad \begin{cases} f(x) & \textit{für } f(x) \geq 0, \\ 0 & \textit{für } f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f^-(x) \quad := \quad \begin{cases} 0 & \textit{für } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \textit{für } f(x) < 0. \end{cases}$$

Beweis: Aus

$$\sup_{x,y}(|f(x)| - |f(y)|) \leq \sup_{x,y}(f(x) - f(y))$$

folgt die Integrierbarkeit der Funktion $|f|$. Die Integrierbarkeit von f^+ und f^- folgt aus den Relationen $f^+ = (|f| + f)/2$ und $f^- = (|f| - f)/2$. ■