Analysis II

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

7. April 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\longrightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/08/index.html

Kap. 2.13–Kap. 2.17 – Integration

Fragestellungen:

- **Rekonstruktion einer Funktion F aus Kenntnis über deren Ableitung $F'(x) \equiv f(x)$,**
- **Berechnung von Flächen krumm berandeter Gebiete,**
- **Berechnung von Arbeit = Kraft $\times$ Weg entlang von krummlinigen Trajektorien (=Bahnen),**
- **Berechnung des Volumens von Rotationskörpern,**
- **Umkehrung von Differentiation**

Buch Kap. 2.13 – Integration, Stammfunktion

Definition 2.33: (Stammfunktion)
Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall I definierte reellwertige Funktion.

Die differenzierbare Funktion $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

heißt Stammfunktion von f.

Stammfunktionen sind nur bis auf Konstanten festgelegt, d.h. mit F ist auch $F + C$ für $C \in \mathbb{R}$ Stammfunktion zu f.

Buch Kap. 2.13 – Integration, Zerlegungen

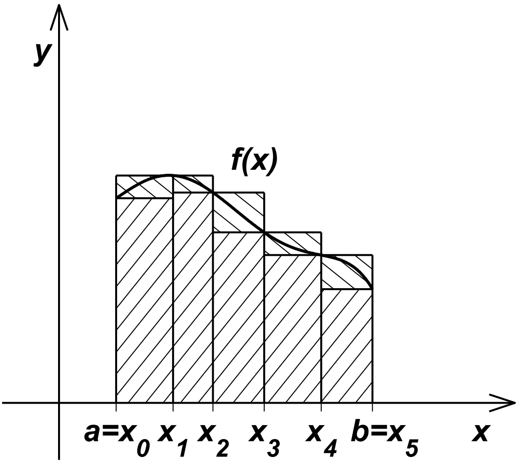

Abbildung: 2.55: Zerlegung ***Z***, Obersumme und Untersumme

Buch Kap. 2.13 – Riemann Integral

Definiton 2.34: (Integrierbarkeit, RIEMANN**sches Integral)**
Eine auf $[a, b]$ beschränkte Funktion f heißt im Intervall $[a, b]$ RIEMANN**-integrierbar, falls das Unter- und Oberintegral von f übereinstimmen, d.h. falls $\underline{I}_f = \bar{I}_f$ gilt.**

Der gemeinsame Grenzwert $\bar{I}_f = \underline{I}_f$ wird bestimmtes RIEMANN**sches Integral von $f(x)$ über $[a, b]$ genannt und mit**

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

bezeichnet.

a heißt untere und b obere Integrationsgrenze und $[a, b]$ wird Integrationsintervall genannt. x heißt Integrationsvariable und $f(x)$ Integrand.

Buch Kap. 2.13 – Riemann Summen

Satz 2.33: (RIEMANNsches Integral) Für jede beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt:

f ist genau dann integrierbar, wenn jede Folge RIEMANNscher Summen $R(Z_k)$ von f, bei denen die Feinheiten $|Z_k|$ der zugehörigen Zerlegungen gegen Null streben und die Punkte ξ_i in den Teilintervallen von Z_k beliebig gewählt werden, gegen denselben Grenzwert konvergiert. Dieser Grenzwert ist dann gleich $\int_a^b f(x)\,dx$, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} R(Z_k) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Buch Kap. 2.13 – Stetigkeit und Integrierbarkeit

Satz 2.34: (Stetigkeit $\Longrightarrow$ Integrierbarkeit)
Eine auf $[a, b]$ stetige Funktion ist integrierbar.

Das gilt auch für stückweise stetige Funktionen, die auf $[a, b]$ mit Ausnahme endlich vieler hebbarer Unstetigkeitsstellen oder Unstetigkeitsstellen 1. Art (Sprungstellen) stetig sind.

Buch Kap. 2.13 – Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 2.35: (Mittelwertsätze der Integralrechnung)

a) (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

b) (verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Sind die Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und ist $g(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$, so existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Buch Kap. 2.13 – Rechenregeln Integration

Satz 2.36: Seien f und g integrierbare Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, $a < c < b$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dann gilt

- $\int_a^b (c_1 f + c_2 g)\, dx = c_1 \int_a^b f\, dx + c_2 \int_a^b g\, dx$,
- $\left| \int_a^b f\, dx \right| \leq \int_a^b |f|\, dx$,
- $\int_a^b f\, dx = \int_a^c f\, dx + \int_c^b f\, dx$,
- $f \geq 0$ auf $[a, b] \Longrightarrow \int_a^b f\, dx \geq 0$,
- ist f auf $[a, b]$ stetig und nichtnegativ, sowie $\int_a^b f\, dx = 0$, so folgt $f \equiv 0$.

Buch Kap. 2.13 – Erster und 2ter Hauptsatz

Satz 2.37: (erster Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung) Ist $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall I stetig, dann ist die Funktion F, definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt, \qquad (x, a \in I),$$

eine Stammfunktion von f.

Satz 2.38: (zweiter Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung) Ist F Stammfunktion einer auf einem Intervall I stetigen oder R-integrierbaren Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, so gilt für beliebige $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b =: \int f(x)dx.$$

Buch Kap. 2.13 – Integration, Stammfunktion

Definition 2.33 (wiederbesucht):
Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall I definierte reellwertige Funktion.
Die differenzierbare Funktion $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

heißt Stammfunktion von f.
Ist F eine Stammfunktion von f, dann heißt

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad C = \text{const.},\ C \in \mathbb{R}$$

unbestimmtes Integral der Funktion f. Die Konstante C heißt Integrationskonstante.
Das unbestimmte Integral einer Funktion f ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f. Die Funktion $f(x)$ heißt Integrand.

Buch Kap. 2.13 – Integrationsregeln

Satz 2.27: Seien c_1 und c_2 reelle Konstanten und f und g Funktionen, die Stammfunktionen besitzen, dann gilt

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\, dx = c_1 \int f(x)\, dx + c_2 \int g(x)\, dx.$$

Satz 2.29: (Substitutionsregeln) Sei f stetig auf dem Intervall J und φ stetig differenzierbar auf dem Intervall I, wobei $\varphi(I) \subset J$ gilt und die Umkehrfunktion φ^{-1} existiert. Dann gilt

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt \text{ mit } t = \varphi(x)$$

Satz 2.29': (Produktintegration) Ist f stetig und g stetig differenzierbar auf I und ist F eine Stammfunktion zu f auf I, so gilt

$$F(x)g(x) = \int f(x)g(x) + F(x)g'(x) dx.$$