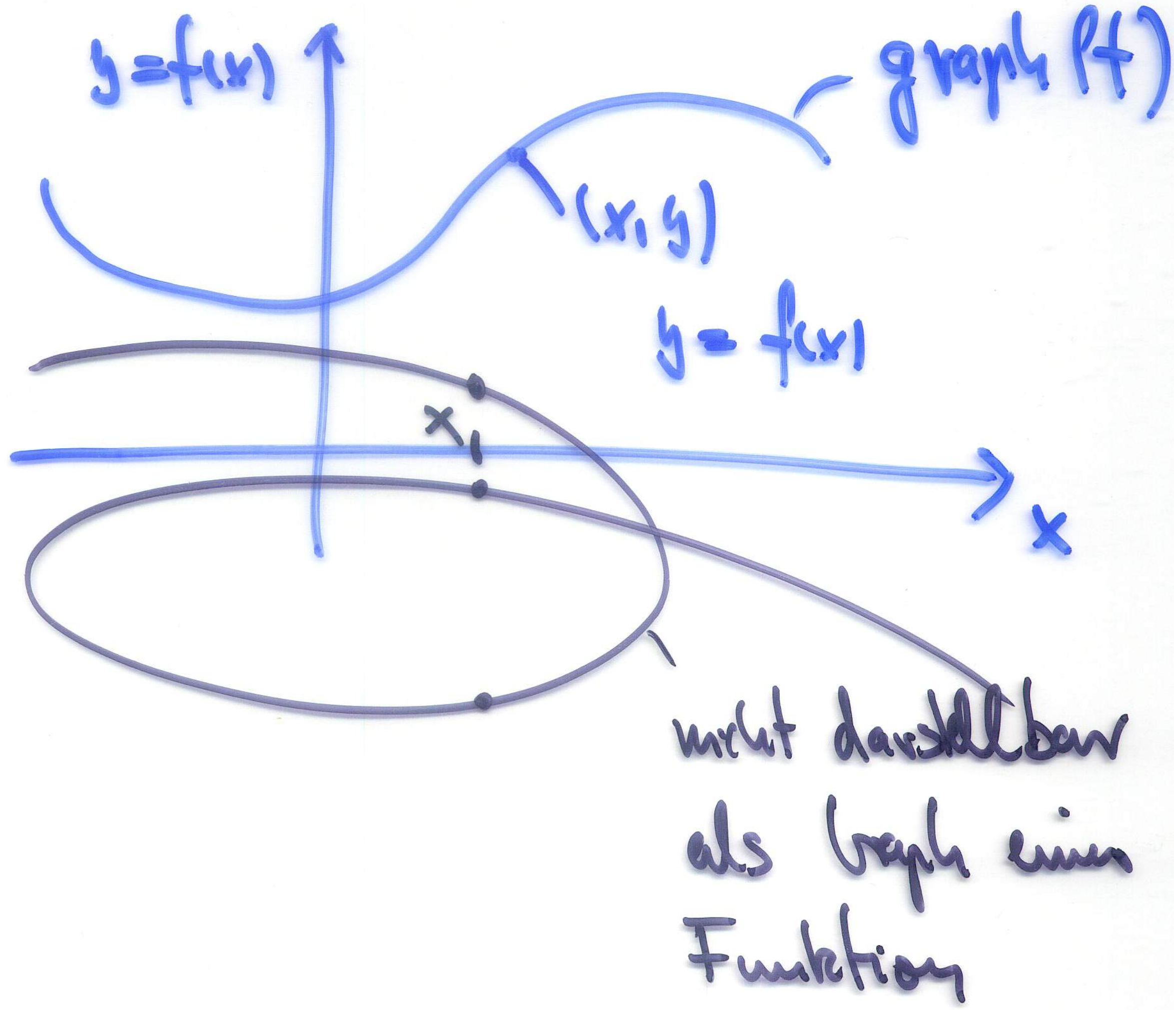
Kurven



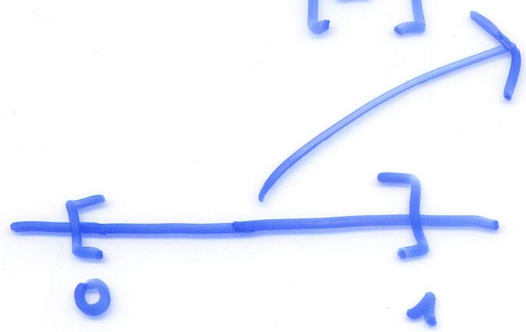
Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ Intervall

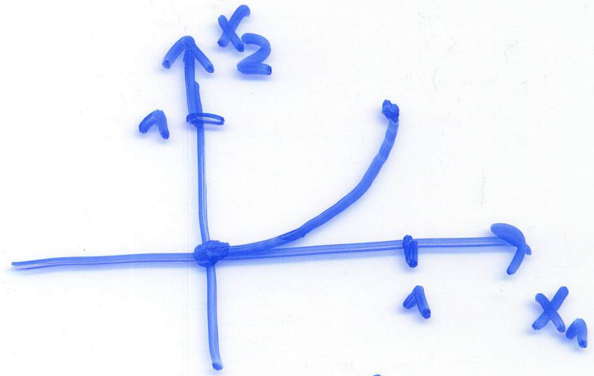
$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \gamma(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Eine solche Abb heißt Kurve (im $\mathbb{R}^2$ ($\cong$ Ebene)).

Bsp: i) $a = 0$, $b = 1$,

$$\gamma(t) := \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$$





Parabelstück

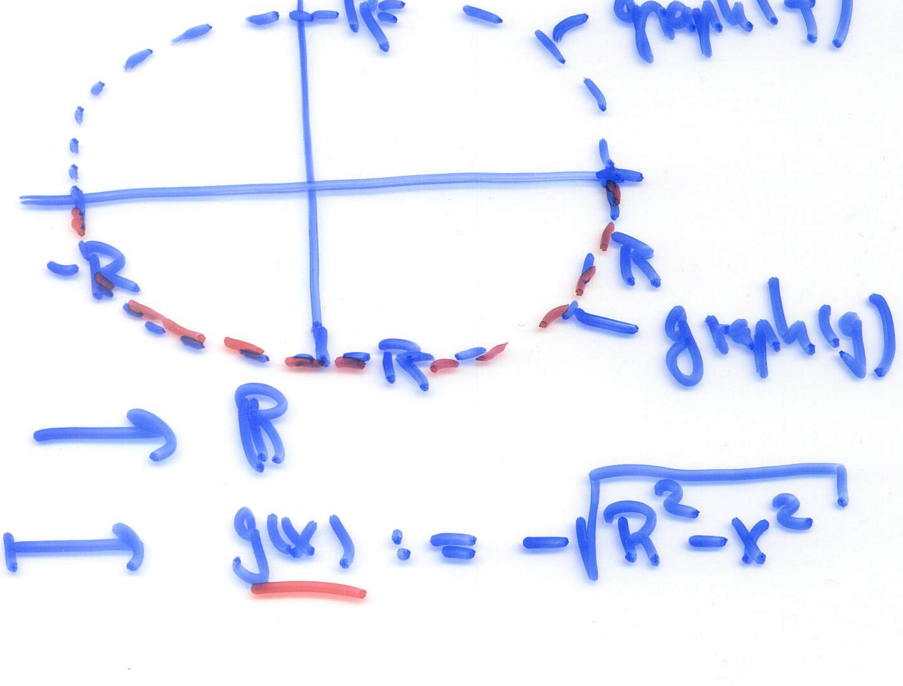
Graph von $f(x) = x^2$

für $x \in [0,1]$.

ii) Kreis mit Radius R.

$$f : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$$

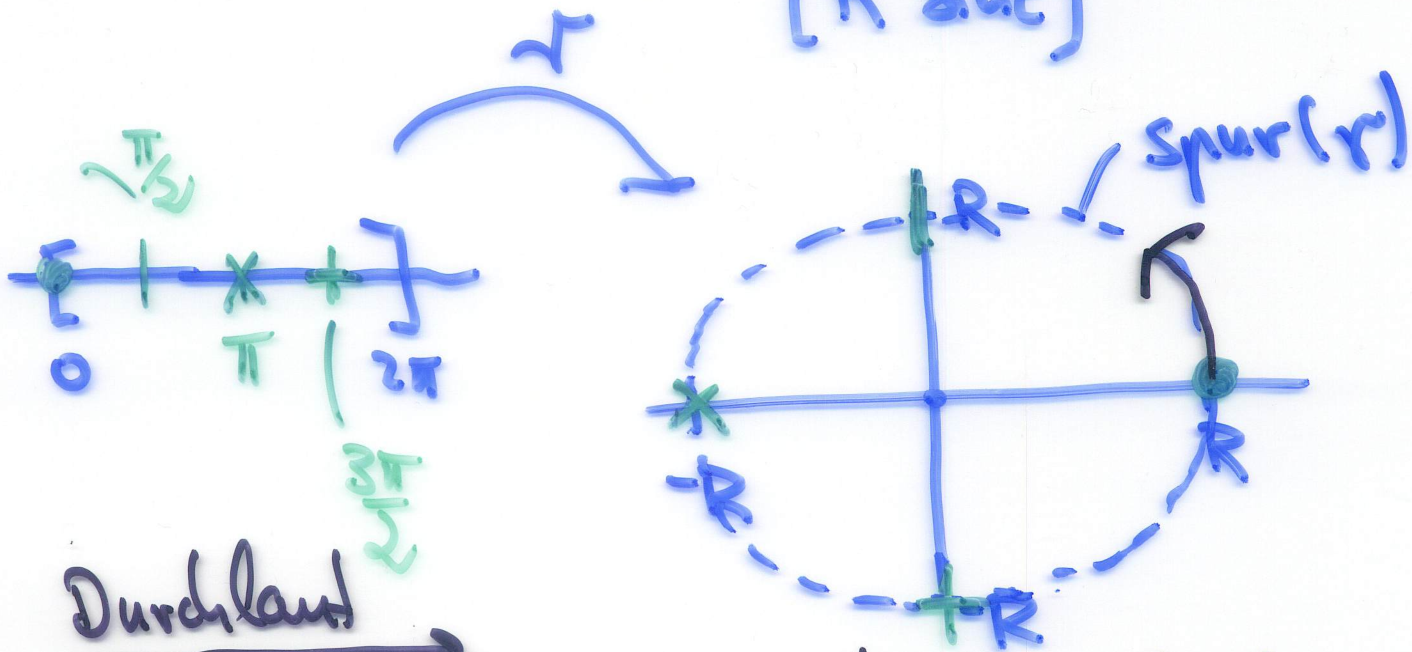


$$g : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto g(x) := -\sqrt{R^2 - x^2}$$

iii) Kreis mit Radius R

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \begin{bmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{bmatrix}$$



Durchlauf Richtung

induziert Durchlaufrichtung auf dem Kreis

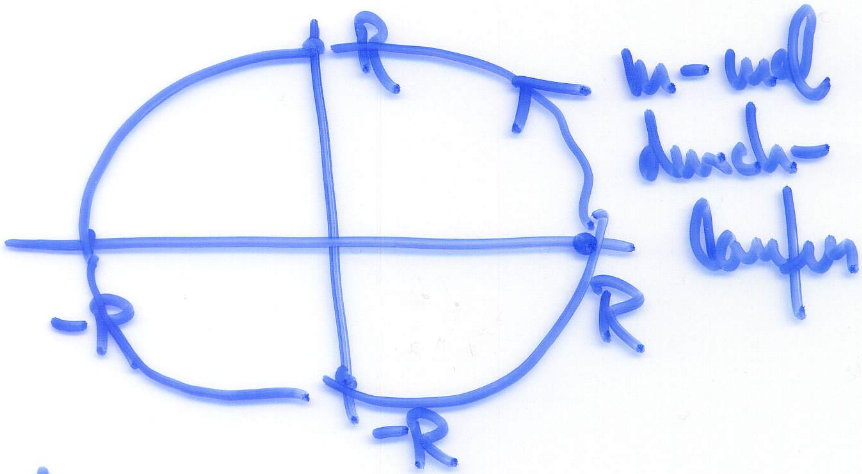
γ heißt Parametrisierung

iv.) $$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \begin{bmatrix} R\cos nt \\ R\sin nt \end{bmatrix}$$

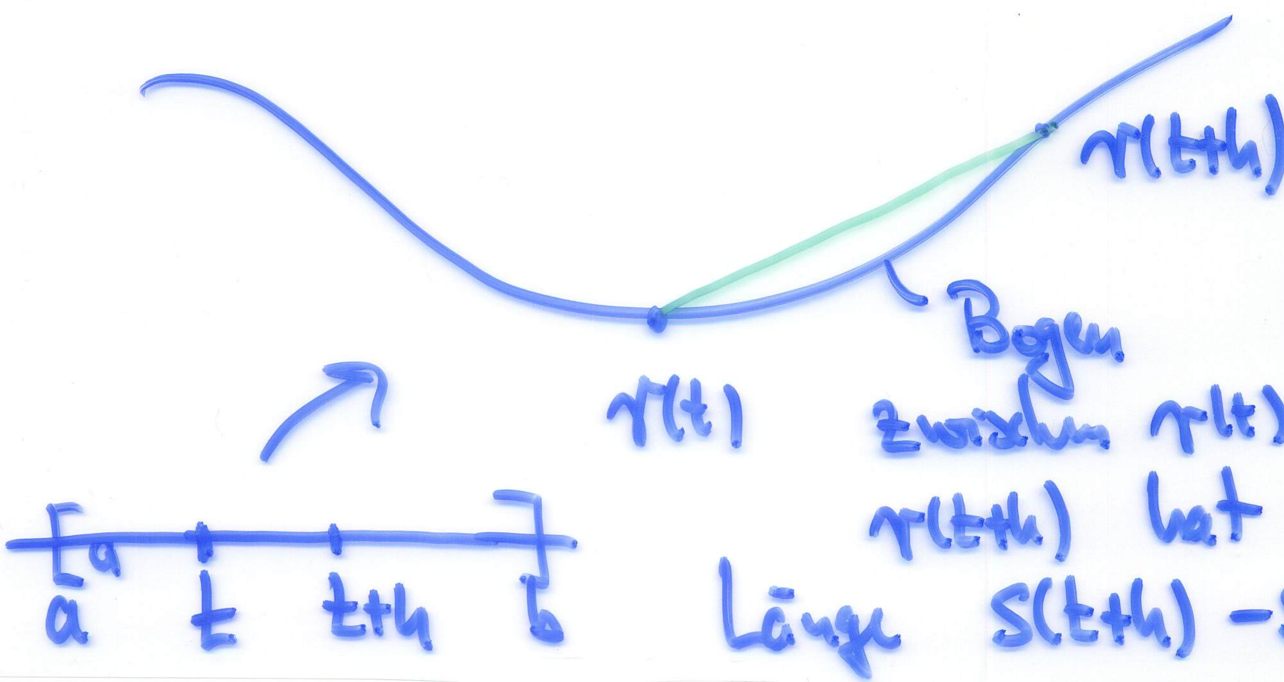
mit $n \in \mathbb{N}$.

150508 (4)

Spur(γ) = Kreis mit Radius R,
doch durchläuft γ diesen
n-mal



Offensichtlich wird in Bsp iv) der
Kreis mit höherer "Geschwindigkeit"
durchlaufen als in Bsp iii).



Bogen zwischen $\gamma(t)$ und $\gamma(t+h)$ hat
Länge $s(t+h) - s(t)$

19.05.08 ③

$s(t)$ = Länge des Kurvenbogens $\gamma(a)$ bis $\gamma(t)$

h klein: $s(t+h) - s(t) \approx$

$$\underline{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|},$$

wobei für einen Vektor $v = (v_1, \dots, v_n)^t \in \mathbb{R}^n$

$$\|v\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

Euklidische Länge

$$\text{Geschwindigkeit} = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

$$\overset{\text{Norm stetig}}{=} \| \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}}_{=: \dot{\gamma}(t)} \|$$

$$= \|\dot{\gamma}(t)\|$$

$$= \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2}, \quad \gamma(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

190508 ⑥

Merke:

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{r}(t)\| \quad \text{bzw}$$

$$ds = \|\dot{r}(t)\|\, dt$$

⌈ Vorschau, Ausblick

$$\int_{r} f \, ds = \int_a^b f(r(t)) \|\dot{r}(t)\| \, dt$$

⌋

Bsp: i.) $r(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}$

mit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ Funktion

$\text{Spur}(r) = \text{graph}(f)$

Es gilt

$$\dot{r}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ f'(t) \end{bmatrix}$$

190508 ⑦

Wir erhalten

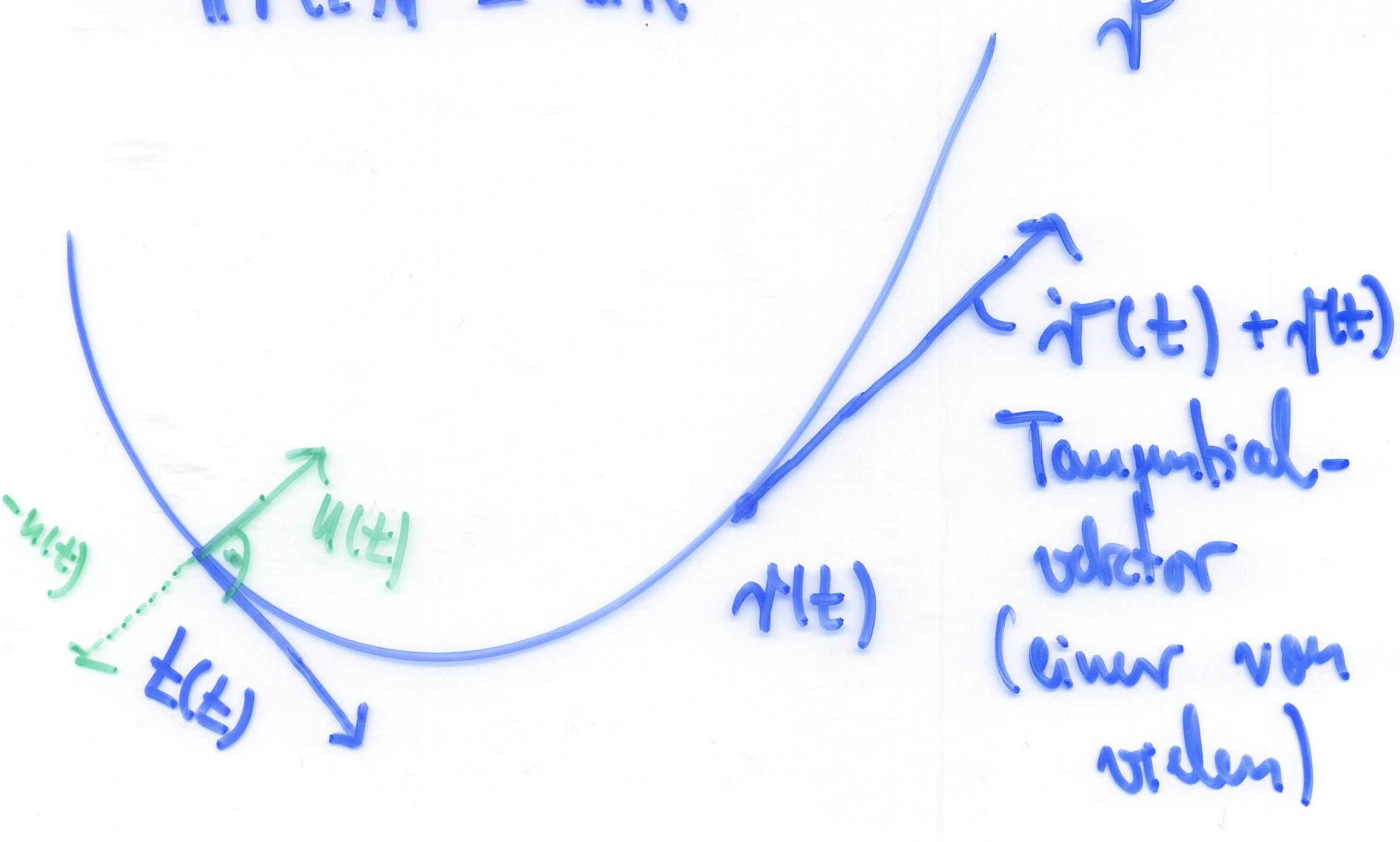
$$\|\dot{r}(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

ii) $r(t) = \begin{bmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{bmatrix}$ $\quad \dot{r}(t) = \begin{bmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{bmatrix}$

$\rightarrow \quad \|\dot{r}(t)\| = R$

iii) $r(t) = \begin{bmatrix} R\cos \omega t \\ R\sin \omega t \end{bmatrix}$ $\quad \dot{r}(t) = \begin{bmatrix} -\omega R\sin \omega t \\ \omega R\cos \omega t \end{bmatrix}$

$\|\dot{r}(t)\| = \omega R$



<u>Vorlange</u>: Parametrisierung ist <u>regulär</u>, d.h. $\|\dot{\gamma}(t)\| > 0 \ \forall_{t \in [a,b]}$

Dann heißt

$$\underline{t}(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$

Tangentialvektor an γ bei $\gamma(t)$.

<u>Beachte</u>: $\|\underline{t}(t)\| = 1$ (Länge = 1)

Normalenvektoren: $n(t) \cdot \underline{t}(t) = 0$

Skalarprodukt

$$n(t) := \frac{\dot{\underline{t}}(t)}{\|\dot{\underline{t}}(t)\|}$$ heißt Hauptnormalenvektor

Entsteht aus $\underline{t}$ durch math. positives Drehen um $90°$. (nur im $\mathbb{R}^2$)

Bemerkung: Bisher vorgestellte Konzepte auch gültig für

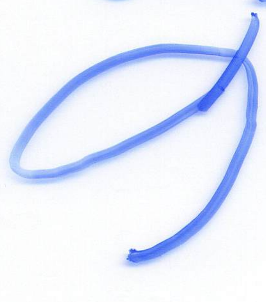
$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \longmapsto \gamma(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Bsp: $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \longmapsto \gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ at \end{bmatrix}, \quad a > 0$$

$$\dot\gamma(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ a \end{bmatrix} \qquad \|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{1+a^2}$$

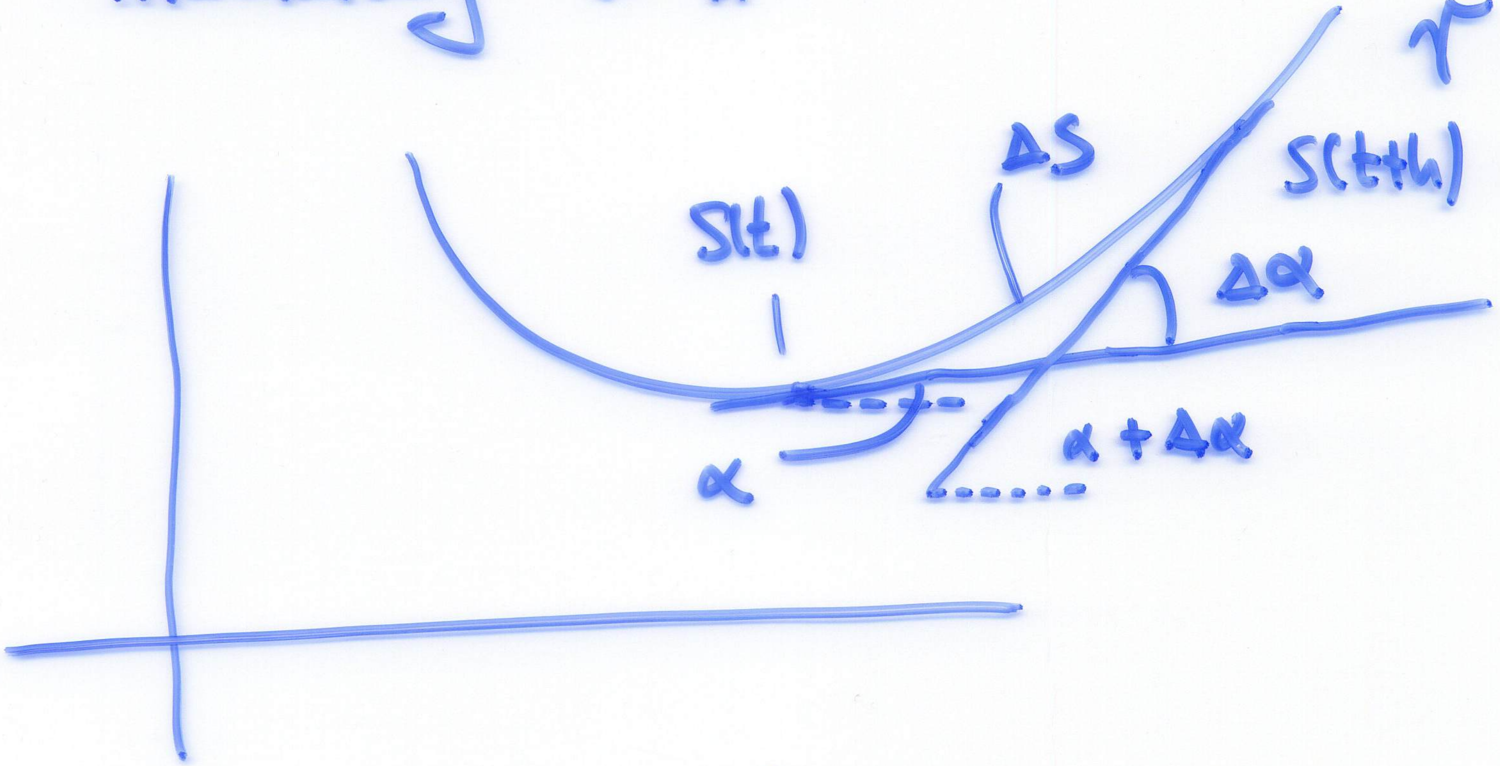


Helix

$$\ddot\gamma(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$t(t) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ a \end{bmatrix}, \quad n(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Krümmung in $\mathbb{R}^2$



$$\kappa(t) := \lim_{h \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta S}$$ Krümmung von γ bei t

$$\vdots$$

$$= \frac{\dot{x}_1(t)\,\ddot{x}_2(t) - \dot{x}_2(t)\,\ddot{x}_1(t)}{\sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2}^{\,3}},$$

wobei $\gamma(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

Bsp: $\gamma(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{1 + f'(t)^2}^{\,3}}$$

Krümmung vom Graphen