160608

1

Konvergenz von Funktionenfolgen

(f_k) Funktionenfolge

Punktweise Konvergenz

$f_k : I \to \mathbb{R}$, $x \in I$

f_k konvergiert punktweise gegen f

gdw $\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

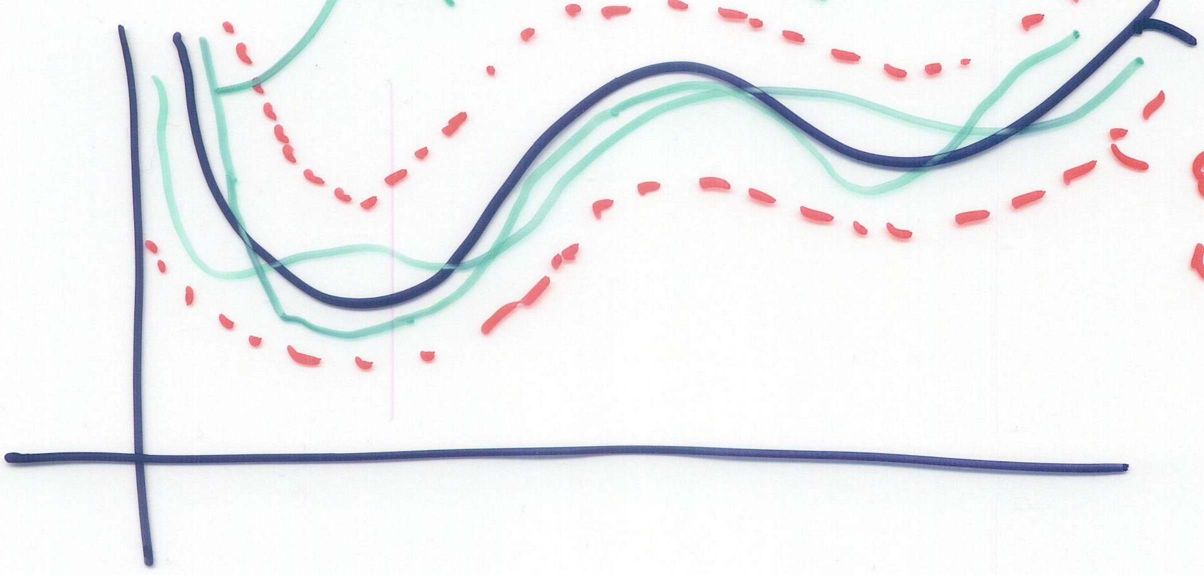
<u>Bsp</u> i) $f_k(x) = \frac{1}{1+x^{2k}}$ $x \in [-2,2]$

ii) $f_k(x) = kx(1-x)^k$ $x \in [0,1]$

$\to 0 \ (k \to \infty)$, x fix.

160608 2

Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen



$$\text{"}\lim_{k\to\infty} f_k = f\text{"}$$

Erwartung: $f_k \in$ ε- Schlauch um f

für k groß genug.

<u>Dazu</u> : $f: I \to \mathbb{R}$

Def : $\|f\|_\infty := \sup_{x\in I} |f(x)|$ Supremums Norm von f

Abstand von Funktionen f, g:

$$\mathrm{dist}(f,g) := \|f-g\|_\infty$$

$\hat{=}$ Abstand von $f-g$ von der Nullfunktion

<u>Def.</u>: (f_k) konvergiert <u>gleichmässig</u> gegen f gdw

$$\lim_{k\to\infty} \underbrace{\|f_k - f\|_\infty}_{\sup_{x\in I} |f_k(x) - f(x)|} = 0$$

<u>Notation</u>: $\lim_{k\to\infty} f_k = f$

<u>Klar</u>: Gleichmässige Konvergenz liefert punktweise Konvergenz, denn

$$\lim_{k\to\infty} |f_k(x) - f(x)| \leq \lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\infty = 0$$

__Beachte__: Punktweise Konvergenz impliziert __NICHT__ gleichmässige Konvergenz

__Bsp__: $f_k(x) := x^k, \quad x \in [0,1]$

$$f_k(x) \xrightarrow{k \to \infty} \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = f(x)$$

Aber $\lim f_k \neq f$,

denn

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \left| x^k - \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \right| \overset{x = \frac{k}{k+1}}{\geq} \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \right| = 1$$

$\to \quad \lim f_k \neq f$

<u>Bsp</u>: $f_k(x) = kx(1-x)^k \quad x\in[0,1]$

$f_k(x) \to 0 \quad (k\to\infty)$

und jedes $x\in[0,1]$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_k(x)-f(x)| \overset{x=\frac{1}{k}}{\geq} \sup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{k\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^k}_{\to \frac{1}{e} > 0}$$

Daher keine glm. Konvergenz.

<u>Frage</u>: Übertragen sich Eigenschaften der Funktionen f_k auf die Grenzfunktion f, falls glm. Konvergenz vorliegt?

<u>Dazu</u>

Cauchy Konvergenzkriterium

$\lim_{k\to\infty} f_k = f$ gdw $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{k_0} \forall_{m,n\geq k_0}: \|f_m - f_n\| < \varepsilon$

d.h. glm. Konvergenz von (f_k) gdw.

(f_k) Cauchyfolge bzgl $\|\cdot\|_\infty$

Nachweis

"$\Rightarrow$" $\lim_{k\to\infty} f_k = f$, d.h. $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\infty = 0$

$\to \|f_m - f_n\|_\infty \leq \|f_m - f\|_\infty + \|f - f_n\|_\infty$

$\to 0 \quad (m,n \to \infty)$ ∎

"$\Leftarrow$" (f_k) Cauchy Folge bzgl $\|\cdot\|_\infty$

$\to (f_k(x))$ Cauchy Folge in $\mathbb{R}$

für jedes $x \in I$

$\to f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ existiert

Damit

$\sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} \|f_m - f_n\| < \varepsilon \ \forall_{n \geq n_0}$

$\to \lim f_n = f$ ✓

<u>Hauptsatz</u>: $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ und

f_k stetig $\forall_k$. Dann ist f stetig.

<u>Z.z.</u>: f stetig in x, d.h.

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{|x-s|<\delta} : |f(x)-f(s)|<\varepsilon$$

<u>Nachweis</u> Sei $\varepsilon>0$ bel.

$$|f(x)-f(s)| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(s)| + |f_n(s)-f(s)|$$

$$= (1) + (2) + (3)$$

$n \geq n_0$: $(1), (3) < \varepsilon/3$

$(2) < \varepsilon/3$ da f_n stetig für $n \geq n_0$.

Damit

$|f(x)-f(s)|<\varepsilon$ falls $|x-s|<\delta$

d.h. f stetig!

160608 8

Satz Sei (f_k) Folge differenzierbarer Funktionen und es gelte

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x_0) = f(x_0) \quad \text{für ein } x_0 \in I$$

und (f_k') konvergiere gleichmässig.

Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f \quad \text{und} \quad \lim f_k' = f'$$

Satz: Sei (f_k) Folge Riemann integrierbarer Funktionen mit

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f$$

Dann $\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Funktionenreihen = Folgen von Partialsummen von Funktionen

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k = \left(\sum_{k=0}^{n} f_k \right)_n .$$

Dabei meint

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) , \quad x \in I ,$$

$$f_k : I \to \mathbb{R}$$

Damit Funktionenreihen spezielle Funktionenfolgen.

Cauchy Kriterium für Funktionenreihen

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ glm konvergent

gdw $\| \sum_{k=n+1}^{m} f_k \|_\infty < \varepsilon \; \forall_{m,n \geq n_0}$

<u>Def.</u>: $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ glm. absolut konvergent :⇔ falls $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty$ konvergiert.

<u>Folgerungen</u>:

i) Sind f_k stetig und $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ glm konvergent, so ist

$$S := \sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{stetig}$$

ii) Es existiere $S(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'$ konvergiere glm.

Dann $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k = S$ mit $S' = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'$

iii) $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ glm. konvergent,

f_k R-integrierbar. Dann

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k \, dx$$