30 06 08

(1)

Potenzreihen

Bemerkung zu Konvergenzradien

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \quad (*)$$

In $(*)$ gilt auch

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Zum Limes Superior (Inferior)

$a_k = (-1)^k$

$$\limsup_{k\to\infty} a_k = 1$$

$$\liminf_{k\to\infty} a_k = -1$$

Potenzreihen und Taylorformel

Sei f ∞-oft diffbar

$$T_n(f,x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x_0,f)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$

Gilt $\lim R_n(x_0,f) = 0$

Dann

$$T_\infty(f,x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Taylorreihe $\hat{=}$ Potenzreihe von f

__Beachte__: Nicht jede Taylorreihe einer ∞-oft Funktion konvergiert auch gegen die Funktion!

Bsp:
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} , & x \neq 0 \\ 0 , & x = 0 \end{cases}$$

f ∞-oft diffbar. Aber

$$T_\infty(f, 0) \equiv 0 \quad \text{(nachprüfen)}$$

Eine Anwendung von Potenzreihen:

Integration

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = \,?$$

Es gilt $\quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$

$$\rightarrow \quad e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k}$$

$$\rightarrow \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \Big|_0^x$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,k!}\, x^{2k+1}$$ Stammfunktion zu e^{-t^2}!

<u>Beachte</u>: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ ist

eine Definition.

Damit

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

mit Hilfe des Cauchy-Produkts für Reihen.

Eine Betrachtung im Komplexen

$$e^z := \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k}_{\in \mathbb{C}} \qquad z \in \mathbb{C}$$

Konvergenzkreise etc wie im Reellen definieren.

30.06.08 5

Wähle $z = ix$, i Imaginäre Einheit, $x \in \mathbb{R}$. Damit $(i^2 = -1)$

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (ix)^k$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \dots\right)$$

$$+ i \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$= \mathrm{Re}\, e^{ix} + i\, \mathrm{Im}\, e^{ix}$$

Def.:

$$\cos x = \mathrm{Re}\, e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\sin x = \mathrm{Im}\, e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Fourier Analysis, Fourier Reihen

Periodische Funktionen f:

$$f(x+L) = f(x) \qquad \forall x \qquad (*)$$

mit einem $L \in \mathbb{R}$, so heißt L Periode von f.

Bsp: $\sin(x+2\pi) = \sin x \qquad L = 2\pi$

$\sin(x+2k\pi) = \sin x \qquad L = 2k\pi$

Kleinste Zahl L mit $(*)$ heißt primitive Periode

OE $L = 2\pi$, denn mit

$x = t\,\frac{L}{2\pi}$ gilt

$$\hat{f}(t) := f\left(t\,\frac{L}{2\pi}\right)$$

$\rightarrow \quad \hat{f}(t+2\pi) = \hat{f}(t)$, falls

$f(x+L) = f(x)$.

Seien a_k $(k=0,\dots,n,\dots)$, b_k $(k=1,\dots)$ reell. Dann heißt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} \left[a_k \cos kx + b_k \sin kx\right]$$

m-te Fourier Summe,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos kx + b_k \sin kx\right]$$

heißt Fourierreihe

Sei f gegeben

Ziel: Darstellung von

$$(1) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos kx + b_k \sin kx\right]$$

als Fourierreihe

Dabei wird f zerlegt in Moden

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\}$$

Finde Koeffizienten a_k, b_k:

TA: f 2π-periodisch.

Multipliziere (1) mit $\cos nx$
und integriere von $-\pi$ bis π

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right] \cdot \cos nx \, dx$$

Setze voraus: Reihe konvergiert gleichmässig $\Rightarrow$ Summation und Integration vertauschbar.

Damit 300608 9

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kx \cos nx + b_k \sin kx \cos nx \, dx$$

Beachte Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi, & n = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi, & n = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

$$k = 0, 1, \ldots$$

b_k: Mult (1) mit $\sin nx$. 300608 10

Dann mit Orthogonalitätsrelationen

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

Wichtige Ungleichungen

Sei f quadratisch integrierbar,

d.h. $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx < \infty$,

dann gilt $\forall m \in \mathbb{N}$

Bessel'sche Ungleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k^2 + b_k^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx$$

wobei a_k, b_k Fourierkoeffizienten

von f seien.

$m \to \infty$ und "Vollständigkeit des Moden Systems" liefern

Parseval'sche Gleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

für quadratisch integrierbare Funktionen

Best-Approximation im quadratischen Mittel

Sei f quadratisch integrierbar

und $S_m := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$

Dann gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_m|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} A_k \cos kx + B_k \sin kx\right] \right|^2$$

30.06.08 12

Für alle $A_k, B_k \in \mathbb{R}$. D.h.

S_n ist Best-Approximation an f im quadratischen Mittel unter allen Funktionen der Form

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[A_k \cos kx + B_k \sin kx \right].$$