Analysis II

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

30. Juni 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\longrightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/08/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/08/index.html

Buch Kap. 3.6 – Potenzreihe von $\exp x$

Definition 3.12: (Exponentialfunktion)
Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\exp x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

heißt Exponentialfunktion.

Satz 3.27: (Additionstheorem)

Für die gemäß

$$\exp x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

erklärte Exponentialfunktion gilt das Additionstheorem

$$(\exp x)(\exp y) = \exp(x + y).$$

Buch Kap. 3.6 – Potenzreihen von **sin *x***, **cos *x***

Definition 3.15: (Sinus und Kosinus)
Die durch die auf ganz $\mathbb{R}$ konvergenten Reihen

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

erklärten Funktionen heißen Sinus- und Kosinus-Funktion.

Beachte:

$$\cos x = \mathrm{Re}\, exp(ix), \qquad \sin x = \mathrm{Im}\, exp(ix).$$

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

Definition 3.17:(periodische Funktion)
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, welche

$$f(x + L) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, heißt periodisch mit Periode $L > 0$. Das kleinste solche L, heißt die Minimalperiode oder auch primitive Periode von f.

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

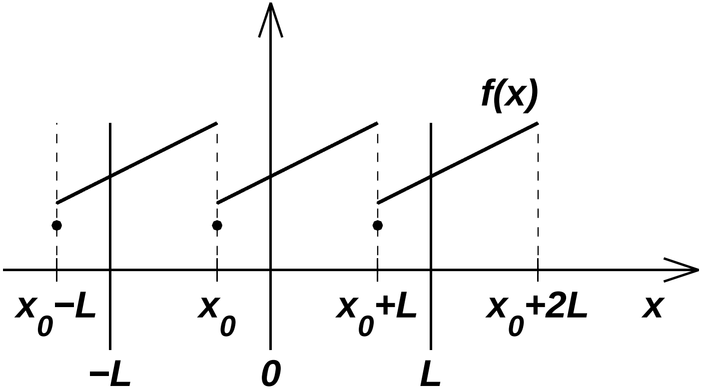

Abbildung 3.20: ***L*-periodische Funktion mit Periodizitätsintervallen $[x_0 + kL, x_0 + (k+1)L),\ x_0 \in \mathbb{R}$**

Definition 3.18: (trigonometrisches Funktionensystem)
Die Funktionen 1, $\sin(nx)$, $\cos(nx)$ für $n \in \mathbb{N}$ bilden das trigonometrische Funktionensystem

$$\{1, \sin nx, \cos nx\}.$$

Ein Ausdruck der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,, \quad a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

heißt trigonometrische Reihe,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,,$$

trigonometrisches Polynom.

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

Orthogonalitätsrelationen für das trigonometrische Funktionensystem ($k, n \in \mathbb{N}$)

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(kx)\,dx &= 0\ , \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,dx &= \delta_{nk}\pi\ , \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,dx &= \delta_{nk}\pi\ .
\end{aligned}
$$

Trigonometrische Reihen, Fourier-Koeffizienten:

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißen

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad \text{für} \quad n = 0,1,2,\ldots\,,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \quad \text{für} \quad n = 1,2,3,\ldots\,.$$

Fourier Koeffizienten von f und

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

zu f assoziierte Fourierreihe.

Satz 3.29: (Konvergenz von FOURIER**-Reihen)**

Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine 2π-periodische, stückweise glatte Funktion (s. Def. 3.19 und Abb. 3.21), so konvergiert ihre FOURIER**-Reihe**

- **punktweise gegen f.**
- **In jedem abgeschlossenen Intervall ohne Unstetigkeitsstellen von f ist die Konvergenz gleichmäßig.**
- **An Unstetigkeitsstellen konvergiert die Fourierreihe gegen das arithmetische Mittel aus links- und rechtsseitigen Grenzwert.**

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

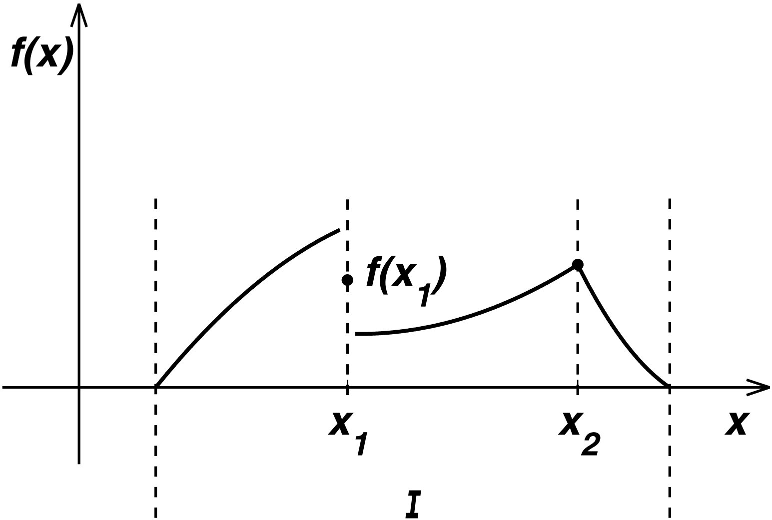

Abbildung 3.21: Stückweise glatte Funktion

Satz 3.30: (BESSEL**sche Ungleichung) Für alle auf** $[-\pi, \pi]$ **quadratisch integrierbaren Funktionen** $f(x)$ **gilt für alle** $n \in \mathbb{N}$ **die Besselsche Ungleichung**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx\ .$$

Dabei sind a_k, b_k **die** FOURIER**-Koeffizienten von** f**.**

Für $n \to \infty$ **ergibt sich für quadratisch integrierbare Funktionen sogar die Parseval'sche Gleichung**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx\ .$$

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

Satz 3.31: (punktweise und gleichmäßige Konvergenz)
Ist f eine stetige, stückweise glatte Funktion der Periode 2π, so konvergiert ihre FOURIER**-Reihe gleichmäßig und absolut gegen f. Für ihre** FOURIER**-Koeffizienten a_k, b_k folgt außerdem die Konvergenz der Reihen**

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \,.$$

Satz 3.33: (Approximation im quadratischen Mittel)
Sei $m \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Der quadratische Fehler der Approximation einer beschränkten, 2π-periodischen Funktion f durch ein trigonometrisches Polynom der Form s_m in der L_2-Norm, d.h.

$$||f - s_m||_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_m(x))^2 \, dx \ ,$$

wird genau dann minimal, wenn die Koeffizienten a_0 und $a_k, b_k, \ k = 1,2,\ldots$ gerade die FOURIER-Koeffizienten der Funktion f sind. Für den Fehler gilt

$$||f - s_m||_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k^2 + b_k^2)\right) .$$