① 070708

Konvergenz im quadratischen Mittel

von

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Es gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_m(x)|^2 \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{m} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 - 2 f(x) S_m(x) + S_m^2(x) \, dx$$

"soll sein"

$$\overset{!}{\leq} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{A_0}{2} - \sum_{k=1}^{m} A_k \cos kx + B_k \sin kx \right)^2 dx$$

$$= (*)$$

für alle $A_k, B_k \in \mathbb{R}$

$$⊛ = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} A_k \cos kx + B_k \sin kx\right]dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} A_k \cos kx + B_k \sin kx\right]^2 dx$$

$\vdots$ – Rechnung, Darstellung von a_k, b_k beachten

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x) - [\dots]\big)^2$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx + \sum_{k=0}^{m}(A_k - a_k)^2 - \sum_{k=0}^{m} a_k^2 + \sum_{k=1}^{m}(B_k - b_k)^2 - \sum_{k=1}^{m} b_k^2$$

wird minimal für $A_k = a_k$, $B_k = b_k$

Fourier Koeffizienten von geraden und ungeraden Funktionen:

f gerade, d.h. $f(t) = f(-t)$: $b_k = 0$

f ungerade, d.h. $f(t) = -f(-t)$: $a_k = 0$

Denn (Nachweis nur für f gerade):

f gerade $\rightarrow$ $f(x) \cos nx$ gerade

und $f(x) \sin nx$ ungerade.

Damit

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi} \right) f(x) \cdot \sin nx \, dx$$

$$\int_{-\pi}^{0} f(x) \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{0} f(-x) \sin n(-x) \, dx$$

$$= -\int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$\rightarrow \quad b_n = 0$$

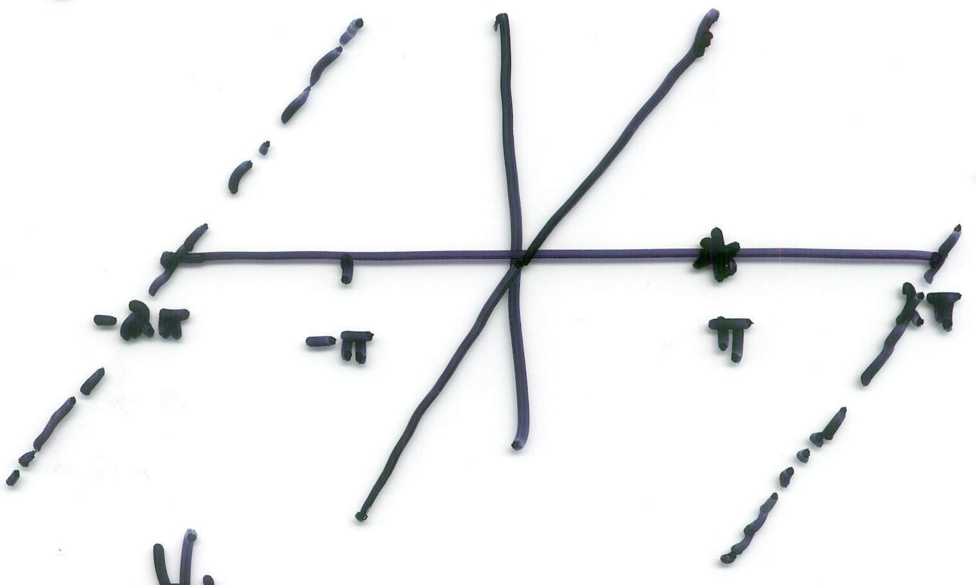
070708 (9)

f ungerade analog

Bsp: $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi < x < \pi \\ 0, & x = \pi \end{cases}$

$f(x+2\pi) := f(x) \quad \forall_{x \in \mathbb{R}}$

$\rightarrow$ f 2π periodisch



Es gilt

$f(\cancel{x}) = -f(-x)$

f ungerade

$\rightarrow \quad a_k = 0 \quad \forall_k$

$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi ax \sin kx \, dx$

partielle Integration

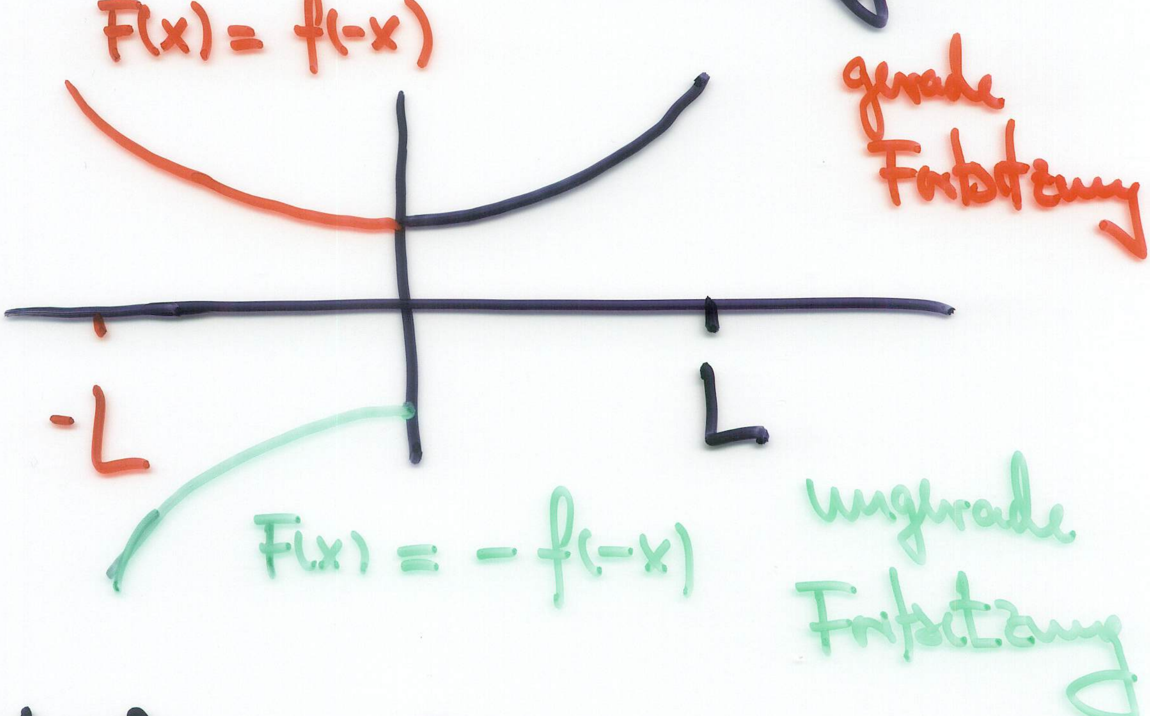
$= \frac{2a}{\pi} \left[-x \frac{1}{k} \cos kx \right]_0^\pi + \frac{1}{k} \underbrace{\int_0^\pi \cos kx \, dx}_{=0}$

$= \frac{2a}{k} (-1)^{k+1}$

Damit

$$f(x) = 2a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$$

Möglichkeiten der Fortsetzung



$$F(x+2kL) := F(x)$$

hat Periode $2L$

Bsp: $f(t) = e^t \quad , 0 \leq t < 1$

$f(t+n) := f(t)$ Periode $L=1$

f weder gerade noch ungerade

Es gilt

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos k\omega x\,dx$$

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin k\omega x\,dx$$

mit $\omega = \frac{2\pi}{L}$ bei beliebigen, L-periodischen Funktion

Damit ergibt sich (modulo verrechnen)

$$e^x = (e-1)\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{1+4\pi^2k^2}\cos 2\pi k x - \frac{4k\pi}{1+4k^2\pi^2}\sin 2k\pi x\right\}$$

Ungerade Fortsetzung mit Periode 2

Damit

$$e^t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{1-k^2\pi^2}\left\{1+\frac{1}{e^2} - (-1)^k\left(e+\frac{1}{e}\right)\right\} \sin k\pi t$$

Gerade Fortsetzung mit Periode 2:

$$e^t = \frac{-\left(1+\frac{1}{e^2}\right)+\left(e+\frac{1}{e}\right)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\left(1+\frac{1}{e^2}\right)+(-1)^k\left(e+\frac{1}{e}\right)}{1-k^2\pi^2} \cos k\pi t$$