Analysis II für

Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser

Department Mathematik

Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg

Sommersemester 2009

Informationen zur Vorlesung

- **Sprechstunde**
  Montag, 9:00-9:40 SBS 95 Raum 2073
- **Klausureinsicht Analysis I**
  Mittwoch, den 8. April 2009, siehe Internet
- **Erste Übung zu Analysis II**
  Im Internet verfügbar, Übungsbetrieb startet nächste Woche
- **Erste Anleitung**
  Dienstag, den 7. April 2009

5.4 Fixpunkt–Iteration

Nochmals: Iterative Lösung der (nichtlinearen) Gleichung

$$f(x) = 0$$

Abschnitt 3.1 der Vorlesung:

- Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung)
- Newton–Verfahren

Iteratives Verfahren: Fixpunkt–Iteration mit Verfahrensfunktion Φ

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

und

$$x^* = \lim_{k \to \infty} x_{k+1} = \lim_{k \to \infty} \Phi(x_k) = \Phi(\lim_{k \to \infty} x_k) = \Phi(x^*)$$

Fixpunkt–Iteration: Löse statt $f(x) = 0$ das Fixpunkt–Problem

$$x = \Phi(x)$$

mittels der Iteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Aber: Verfahrensfunktion Φ ist nicht eindeutig!

Beispiel: Suche im Intervall $(0, \pi/2)$ die eindeutige Nullstelle von

$$f(x) := 2x - \tan x$$

1. Iteration mittels

$$2x - \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \tan x =: \Phi_1(x)$$

2. Iteration mittels

$$2x - \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan 2x =: \Phi_2(x)$$

Ergebnis der 1. Iteration und 2. Iteration:

- Iterationen

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \tan x_k \qquad y_{k+1} = \arctan 2y_k$$

- Wähle als Anfangsnäherung in beiden Iterationen

$$x_0 := 1.2 \qquad y_0 := 1.2$$

- Beide Iterationen konvergieren im Grenzwert $k \to \infty$, aber

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0 \qquad \lim_{k\to\infty} y_k = 1.1655\,61185$$

- Berechne die Iterationen mittels eines Computerprogramms

Konvergenzgeschwindigkeit hängt ab von

dem Abstand zwei benachbarter Folgenglieder: $|x_{k+1} - x_k|$

Definition: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.

Eine Abbildung $\Phi : D \to V$, $D \subset V$ heißt **Lipschitz–stetig** auf D, falls eine Konstante L existiert, sodass

$$\forall\, x, y \in D \quad : \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\|$$

Die Konstante L nennt man **die Lipschitz–Konstante**.

Definition: Eine Abbildung $\Phi : D \to V$, $D \subset V$ heißt **kontrahierend**, falls $L < 1$ gilt.

Man nennt dann L die **Kontraktionskonstante** von Φ.

Bemerkung: Jede Lipschitz–stetige Funktion ist stetig!

Es gelte die Abschätzung

$$\forall\, x \neq y \quad : \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \|x - y\|$$

Dann ist Φ nicht notwendigerweise kontrahierend!

Satz: Jede C^1–Funktion $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz–stetig auf $[a,b]$ mit der Lipschitz–Konstanten

$$L := \sup\{|\Phi'(x)| \ : \ a \leq x \leq b\}$$

Ist $L < 1$, so ist Φ kontrahierend; ist dagegen $L > 1$, so ist Φ nicht kontrahierend!

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)|\,|x-y| \leq L\,|x-y|$$

Beispiel: Betrachte die Funktion $\Phi(x) = e^{-x}$. Dann gilt

$$\Phi'(x) = -e^{-x}$$

Lipschitz–Konstante

$$L := \sup\{|e^{-x}| \ : \ a \leq x \leq b\}$$

Banachscher Fixpunktsatz

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum (Banachraum). Ferner sei $D \subset V$ abgeschlossen und $\Phi : D \to D$ eine kontrahierende Abbildung der Menge D in sich mit einer Kontraktionskonstanten L (also $L < 1$).
Dann gelten die folgenden Aussagen:

1) Es gibt genau einen Fixpunkt x^* von Φ in D

2) Für jeden Startwert $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunkt–Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ gegen den Fixpunkt x^*

3) Es gelten die Fehlerabschätzungen:

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|$$

Beispiel: Berechne den kleinsten Fixpunkt von $\Phi(x) = 0.1e^x$
Setze $D = [0, 1]$, dann gilt

$$0 < \Phi(x) \leq \frac{\exp(1)}{10} < 1$$

Daher bildet Φ das Intervall $D = [0, 1]$ auf sich ab.

$$\Phi(x) = \Phi'(x) = 0.1e^x$$

Damit ist Φ auf D kontrahierend mit $L := \exp(1)/10$.
Berechne Fixpunkt x^* mit einem absoluten Fehler von ca. 10^{-6}:

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1 - L}\|x_1 - x_0\| \leq 10^{-6}$$

Daraus ergibt sich mit $x_0 = 1$ und damit $x_1 = \exp(1)$

$$n \geq \frac{-6}{\log_{10} L} \approx 10.61$$

Tatsächlich ergibt sich nach 11 Iterationen eine zehnstellige Genauigkeit.

Bemerkung: Existiert eine abgeschlossen Kugel

$$K = \{x \in V \mid \|x - y_0\| \leq r\}$$

mit den Eigenschaften

1) $\Phi : K \to V$ ist kontrahierend mit Konstraktionskonstante $L < 1$
2) $\|\Phi(y_0) - y_0\| \leq (1 - L)r$

so gilt $\Phi(K) \subset K$ und der Fixpunktsatz lässt sich mit $D = K$ anwenden.

Beweis: Betrachte ein $y \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\Phi(y) - y_0\| &\leq \|\Phi(y) - \Phi(y_0) + \Phi(y_0) - y_0\| \\ &\leq L\|y - y_0\| + (1 - L)r \\ &\leq r \end{aligned}$$

Kapitel 6: Potenzreihen und elementare Funktionen

6.1 Gleichmäßige Konvergenz

Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Funktionen mit $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$

Definition: Zur Konvergenz von Funktionenfolgen definieren wir

1) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert **punktweise** gegen eine Funktion f, falls gilt:

$$\forall\, z \in D \quad : \quad \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$$

2) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert **gleichmäßig** gegen eine Funktion f, falls

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left[\sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)|\right] = 0$$

Beispiel: Betrachte die Funktionenfolge (f_n) definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & : \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & : \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Diese Folge konvergiert offensichtlich gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x = 0 \\ 0 & : \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Die Konvergenz ist aber **nicht** gleichmäßig, denn

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 \qquad \forall\, n \geq 0$$

Jede Funktion $f_n(x)$ der Folge ist außerdem **stetig**

Die Grenzfunktion f ist **nicht** stetig!

Beispiel: Wir betrachten die Funktionfolge

$$f_n(x) = nx\,\text{exp}(-nx) \qquad n \geq 1$$

Die Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen $f(x) = 0$, allerdings:

$$f_n'(x) = n\,\text{exp}(-nx) - n^2 x\,\text{exp}(-nx) = n\,\text{exp}(-nx)(1 - nx)$$

Aus $f_n'(x) = 0$, folgt $x = 1/n$. Weiter gilt:

$$f_n''(1/n) < 0$$

Das Maximum der Funktion $f_n(x)$ liegt bei $x = 1/n$ mit

$$f_n(1/n) = \text{exp}(-1) \qquad \forall\, n \geq 1$$

Satz: Konvergiert eine Funktionfolge (f_n) mit $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f und sind die Funktionen f_n stetig auf D, so ist auch die Grenzfunktion stetig auf D.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und n so gewählt, dass

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

Weiter sei $\delta > 0$ so gewählt, dass

$$\forall\, z \in D \quad : \quad \|z - z_0\|_\infty < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Satz: Gleichmäßige Konvergenz von Reihen von Funktionen

1) **Majorantenkriterium von Weierstraß**

   Gegeben seien Funktionen $f_k : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$. Gilt dann für $b_k \in \mathbb{R}$: $\forall\, z \in D \quad : \quad |f_k(z)| \leq b_k \quad \wedge \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$,

   so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ gleichmäßig und absolut konvergent auf D.

2) Sind die Funktionen $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $[a,b]$ und die beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(z)$ gleichmäßig konvergent, so ist auch $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(z)$$

   für alle $x \in [a,b]$.

6.2 Potenzreihen

Definition: Eine Reihe der Form

(1) $$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

heißt **(komplexe) Potenzreihe** zum Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Dabei gilt $a_k \in \mathbb{C}$ ($k \in \mathbb{N}_0$) und $z \in \mathbb{C}$.

Beispiel: (3.4 Konvergenzkriterien für Reihen aus Analysis I)

Die Exponentialfunktion ist über eine Potenzreihe definiert:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

Elementare Funktionen sind über Potenzreihen definiert:

$$\ln z, \quad a^z, \quad \cosh(z), \sinh(z), \quad \cos(z), \sin(z), \quad \tan(z), \cot(z)$$

Beispiel: Eine Potenzreihe für reelle Zahlen ist die Taylor–Reihe

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Die Taylor–Reihe einer C^∞–Funktion ist im Allgemeinen

nicht konvergent.

Konvergiert die Reihe, so nicht notwendigerweise gegen $f(x)$.

Gilt aber

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

so nennt man die Funktion f **reell analytisch** oder eine C^ω–Funktion (aus Analysis I).

Satz: **(Konvergenz von Potenzreihen)**

1) Zu jeder Potenzreihe (1) gibt es eine Zahl r, $0 \leq r \leq \infty$, den sogenannten **Konvergenzradius** der Potenzreihe mit den Eigenschaften

$$|z - z_0| < r \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \textbf{absolut konvergent}$$

$$|z - z_0| > r \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \textbf{divergent}$$

2) Konvergenzradius nach der **Formel von Cauchy, Hadamard**

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \qquad \text{(siehe 3.2 aus Analysis I)}$$

Dabei setzt man: $\dfrac{1}{\infty} := 0$, $\dfrac{1}{0} := \infty$

Satz: (Konvergenz von Potenzreihen)

3) Falls einer der folgenden Grenzwerte existiert bzw. gleich ∞ ist, ist er gleich dem Konvergenzradius r:

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}, \qquad r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

4) Formal kann man Potenzreihen differenzieren und erhält

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1}$$

Dies ist wiederum eine Potenzreihe.
Der Konvergenzradius ist identisch mit dem Konvergenzradius der Ausgangsreihe (auch im Fall $r = 0$ oder $r = \infty$).

Beweis: **Teil 1):** Wir definieren

$$r := \sup\left\{|w| \quad | \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k \text{ konvergent}\right\}$$

Dann gilt $0 \le r \le \infty$ und für $|z-z_0| > r$ ist die Potenzreihe divergent.
Gilt $r = 0$, so ist die Potenzreihe (absolut) konvergent nur für $z = z_0$.

Sei also $r > 0$ und $0 < \rho < r \quad \Rightarrow$

$$\exists\, w \in \mathbb{C},\ |w| > \rho \ : \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k \text{ konvergent}$$

$$\exists\, M > 0 \ : \ \forall\, k \ge 0 \quad : \quad |a_k w^k| \le M \quad ((a_k w^k)_{k\ge 0} \text{ ist beschränkt})$$

Sei nun $|z-z_0| \le \rho < |w|$. Dann gilt:

$$|a_k(z-z_0)^k| = |a_k w^k| \left|\frac{z-z_0}{w}\right|^k \le M \left|\frac{z-z_0}{w}\right|^k$$

Sei nun $|z - z_0| \leq \rho < |w|$. Dann gilt:

$$|a_k(z - z_0)^k| = |a_k w^k| \left|\frac{z - z_0}{w}\right|^k \leq M \left|\frac{z - z_0}{w}\right|^k$$

Es gilt:

$$\left|\frac{z - z_0}{w}\right|^k \leq \left|\frac{z - z_0}{w}\right| < 1$$

Also ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|\frac{z-z_0}{w}\right|^k$ eine **geometrische Reihe**.

Wir haben demnach

$$|a_k(z - z_0)^k| \leq b_k \quad \wedge \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$$

Majorantenkriterium von Weierstraß $\Rightarrow$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ konvergiert absolut und gleichmäßig für $|z - z_0| \leq \rho$.

Teil 2): Wir verwenden das Wurzelkriterium:

$$\forall\, k \geq k_0 \ : \ \sqrt[k]{|a_k(z-z_0)^k|} < q \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k(z-z_0)^k|} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\, |z-z_0| < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad |z-z_0| < \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Teil 3): Die erste Aussage folgt aus Teil 2).

Für den zweiten Teil verwenden wir das Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-z_0| \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$$

Also:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-z_0| < \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

Teil 4): Nach Teil 2) ist zu berechnen:

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|a_k|}$$

Wegen $\sqrt[k]{k} \to 1$ für $k \to \infty$ gilt:

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Also sind die Konvergenzradien der Ausgangsreihe und der abgeleiteten Reihe identisch.

Bemerkung: Die Konvergenz von $\sqrt[k]{k} \to 1$ zeigt man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{k} := 1 + r_k,\ r_k \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad k = (1+r_k)^k \geq 1 + \frac{k(k-1)}{2} r_k^2 \\ &\Rightarrow \quad r_k^2 \leq \frac{2}{k} \ \to \ 0 \quad (k \to \infty) \\ &\Rightarrow \quad r_k \to 0 \quad (k \to \infty) \end{aligned}$$

Beispiel:

1) Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!z^k$ konvergiert nur für $z = 0$, denn $k!z^k$ ist für $z \neq 0$ keine Nullfolge.

2) Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ hat den Konvergenzradius $r = 1$.

3) Die Exponentialreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{k!}$ hat den Konvergenzradius $r = \infty$.

4) Differentiation der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ ergibt:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} = \frac{1}{2}\Big(2 + 6z + 12z^2 + \ldots\Big)$$

Beispiel:

5) Aus Teil 4) des letzten Satzes folgt auch, dass die integrierte Potenzreihe

$$C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z - z_0)^{k+1}$$

den gleichen Konvergenzradius wie die Ausgangsreihe besitzt.

Beispiel: Integration der Potenzreihe

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \qquad |z| < 1$$

ergibt eine Potenzreihenentwicklung der Logarithmusfunktion

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \qquad -1 < x < 1$$

Beispiel:

5) Fortsetzung:

Integration der Potenzreihe

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$$

ergibt

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}, \qquad -1 < x < 1$$

Bemerkung:

1) Eine Potenzreihe ist innerhalb ihres Konvergenzkreises mit Radius r stetig.
Reelle Potenzreihen sind auf $(x_0 - r, x_0 + r)$ auch C^∞–Funktionen.
Eine reelle Potenzreihe ist gleich der Taylor–Reihe einer Funktion.

Bemerkung:

2) Es gilt der folgende **Identitätssatz** für Potenzreihen:

   Sind $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ reelle Potenzreihen, die in einem Intervall $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ die gleiche Funktion darstellen, so gilt:

$$a_k = b_k \qquad \forall\, k$$

3) **Abelsche Grenzwertsatz**

   Reelle Potenzreihen der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

   sind überall dort stetig, wo sie konvergieren, d.h. insbesondere auch in den zum Konvergenzbereich gehörigen Randpunkten des Konvergenzintervalls.

Beispiel: Da die Reihe

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \qquad -1 < x < 1$$

auch für $x = +1$ konvergiert, folgt nach dem Abelschen Grenzwertsatz, dass die obige Gleichung auch in $x = 1$ gültig ist:

$$\ln(1+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} 1^{k+1}$$

Daraus folgt:

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Satz: (Rechenregeln für Potenzreihen)

Seien $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1 > 0$ und $r_2 > 0$. Dann gelten:

1)

$$f(z) + g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k, \qquad |z| < \min(r_1, r_2)$$

2)

$$\lambda f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k z^k, \qquad |z| < r_1$$

3) **Cauchy–Produkt für Potenzreihen**

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} \right) z^k, \qquad |z| < \min(r_1, r_2)$$

Satz: (Rechenregeln für Potenzreihen)

4) Ist $f(0) = 0$, so läßt sich die Potenzreihe $f(z)$ in die Potenzreihe $g(z)$ einsetzen. Es gibt also ein $r_3 > 0$ und $c_k \in \mathbb{C}$ mit:

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad |z| < r_3$$

5) Ist $f(0) \neq 0$, so besitzt die Funktion $1/f(z)$ eine Potenzreihenentwicklung. Es gilt also $r_4 > 0$ und $d_k \in \mathbb{C}$ mit:

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \qquad |z| < r_4$$

Die Koeffizienten d_k lassen sich rekursiv berechnen:

$$a_0 d_0 = 1, \qquad a_0 d_k = -\sum_{l=0}^{k-1} d_l a_{k-l}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Dies ergibt sich direkt aus dem Cauchy–Produkt.

Beispiele zu den Rechenregeln von Potenzreihen:

1) Wir definieren für $x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

und ersetzen e^x durch die Potenzreihe $\sum \frac{x^k}{k!}$:

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-x)^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}x^{2k} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Analog erhält man für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

Beispiele zu den Rechenregeln von Potenzreihen:

2) Für $f(x) = \dfrac{\cos x}{1-x}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x}{1-x} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} x^l \right) \\
&= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots) \cdot (1 + x + x^2 + \ldots) \\
&= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{2!}\right) x^2 + \left(1 - \frac{1}{2!}\right) x^3 \\
&\quad + \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right) x^4 + \ldots \qquad -1 < x < 1
\end{aligned}$$

Beispiele zu den Rechenregeln von Potenzreihen:

3) Wir setzen

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Dabei lautet die Potenzreihe des Nenners:

$$e^x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1}$$

Zur Potenzreihenentwicklung von $g(x)$ machen wir daher den Ansatz:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$$

Damit gilt:

$$1 = \frac{e^x - 1}{x} \cdot g(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l \right)$$

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \frac{B_l}{l!(k-l+1)!} \right) x^k$$

Also muss gelten:

$$\sum_{l=0}^{k} \frac{B_l}{l!(k-l+1)!} = \begin{cases} 1 & : \quad k = 0 \\ 0 & : \quad k > 0 \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$B_0 = 1, \qquad B_k = -\sum_{l=0}^{k-1} \frac{k!}{l!(k-l+1)!} B_l \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Die Zahlen B_k nennt man **Bernoullische Zahlen**:

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42}, \ldots$$

6.3 Elementare Funktionen

Die Exponentialfunktion
Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir:

$$\boxed{\exp(z) := \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{k!} z^k}$$

Konvergenzradius $r = \infty \Rightarrow \exp(z)$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$ erklärt und stetig.

Für reelle Argumente ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x), \qquad \exp(0) = 1$$

Gewöhnliche Differentialgleichung: suche eine Funktion $y(x)$ mit

$$y'(x) = a \cdot y(x), \quad y(x_0) = y_0$$

(Eindeutige) Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = y_0 \cdot \exp(a \cdot (x - x_0))$$

Eigenschaften der Exponentialfunktion:

1) Funktionalgleichung

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \qquad \forall\, z, w \in \mathbb{C}$$

2) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(z) \neq 0, \qquad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$$

3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(x) > 0$$

4) Asymptotische Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$$

5) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0$$

6) Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend mit Wertebereich $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

7) Es gilt:

$$\begin{aligned} e &:= \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ e &= 2.7182\,81828\,45904\,52353\,60287\ \ldots \end{aligned}$$

Weiter ist e eine **irrationale Zahl**, sogar eine **transzendente** Zahl.

8) Für alle $q \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(qx) = (\exp(x))^q$$

Der natürliche Logarithmus

Da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, existiert die **Umkehrfunktion**:

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

Diese Funktion nennt man den **natürlichen Logarithmus**.

Eigenschaften:

1) Die Funktion $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig.

2) Es gilt: $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$.

3) Funktionalgleichung:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \qquad \forall\, x, y > 0$$

4) Potenz:

$$\ln(x^q) = q \cdot \ln x \qquad \forall\, x > 0,\ q \in \mathbb{Q}$$

5) Spezielle Funktionswerte:

$$\ln(1) = 0, \qquad \ln(e) = 1$$

6) Der natürliche Logarithmus ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

7) Es gilt die Potenzreihenentwicklung:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad (-1 < x < 1)$$

Die allgemeine Potenz

Für $a > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ hatten wir:

$$a^q = \exp(q \cdot \ln a)$$

Wir definieren daher **allgemeine Potenzen**:

$$a^z := \exp(z \cdot \ln a) \qquad (a > 0,\ z \in \mathbb{C})$$

Eigenschaften der allgemeinen Potenz:

1) Die Funktion $f(x) = a^x$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

2) Es gilt:

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

sowie

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

3) Für $a \neq 1$ besitzt $y = a^x$ eine Umkehrfunktion

$$y(x) = \log_a x$$

den **Logarithmus zur Basis** a. Es gilt:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad (x > 0)$$

4) Es gelten die folgenden Differentiationsregeln:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(a^x) &= \ln a \cdot a^x \qquad (x \in \mathbb{R},\ a > 0) \\ \frac{d}{dx}(x^a) &= a x^{a-1} \qquad (a \in \mathbb{R},\ x > 0) \\ \frac{d}{dx}(\log_a x) &= \frac{1}{x \ln a} \qquad (x, a > 0) \end{aligned}$$

5) Verallgemeinerung des binomischen Satzes:

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \qquad (a \in \mathbb{R},\ -1 < x < 1)$$

mit

$$\binom{a}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (a-j) \qquad (k \geq 0)$$

Spezialfälle sind die beiden Entwicklungen:

$$\sqrt{1+x} \;=\; 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + - \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \;=\; 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - + \ldots$$

Beweisidee: Rechte Seite löst die Differentialgleichung

$$(1+x)g'(x) = ag(x)$$

Die hyperbolischen Funktionen: Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \qquad \sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

Die entsprechenden Potenzreihenentwicklungen sind (siehe oben):

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \qquad \sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

Eigenschaften:

1) Die Funktion cosh ist **gerade**, d.h.

$$\cosh(-z) = \cosh(z)$$

Dagegen ist die Funktion sinh **ungerade**, d.h.

$$\sinh(-z) = -\sinh(z)$$

2) Ableitungen der hyperbolischen Funktionen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\cosh(x) &= \sinh(x)\\ \frac{d}{dx}\sinh(x) &= \cosh(x)\end{aligned}$$

3) Funktionalgleichungen:

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y\\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y\end{aligned}$$

4) Algebraische Relation:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Inverse hyperbolische Funktionen, Areafunktionen:

Die Funktion $\sinh$ ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, $\cosh$ auf $[0, \infty)$:

Die Umkehrfunktionen bezeichnen wir mit **arcosh** und **arsinh**

Es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad (x \in \mathbb{R}) \\ \operatorname{arcosh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \qquad (1 \leq x < \infty) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\operatorname{arsinh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (x \in \mathbb{R}) \\ \frac{d}{dx}\operatorname{arcosh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (1 \leq x < \infty) \end{aligned}$$

Die trigonometrischen Funktionen:

$$\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

Konvergenzradius $r = \infty \Rightarrow$ Funktionen sind auf ganz $\mathbb{C}$ erklärt und dort stetig.

Eigenschaften:

1) $\sin$ ist eine ungerade, $\cos$ eine gerade Funktion

$$\sin(-z) = -\sin(z), \qquad \cos(-z) = \cos(z)$$

und

$$\sin(0) = 0, \qquad \cos(0) = 1$$

2) Es gilt:

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= \cos z + i \sin z, \qquad e^{-iz} = \cos z - i \sin z \\
\sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = (\sin x \cosh y) + i(\cos x \sinh y) \\
\cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = (\cos x \cosh y) - i(\sin x \sinh y)
\end{aligned}$$

sowie

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

3) **Funktionalgleichungen**

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v, \quad \cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \,\mathrm{si}$$

4) **Reelle** Ableitungen:

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

Die komplexen Tangens– und Kotangensfunktionen

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \left(z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z} \qquad (z \neq k\pi)$$

Eigenschaften:

1) $\tan$ und $\cot$ sind π–periodische, ungerade Funktionen.

2) Es gilt:

$$\tan z = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \qquad \left(z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$\cot z = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \qquad (z \neq k\pi)$$

3) Reihen–Entwicklungen:

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}|B_{2k}|z^{2k-1} \qquad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{4725}z^7 - \dots$$

$$= \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!}|B_{2k}|z^{2k-1} \qquad (0 < |z| < \pi)$$

mit den Bernoullischen Zahlen B_{2k}.

4) **Reelle** Ableitungen:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (x \neq k\pi)$$

Kapitel 7: Interpolation

7.1 Problemstellung

Gegeben: Diskrete Werte einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Stützstellen)

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots, (x_n, f_x) \qquad (x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$$

Gesucht: **Einfache** Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Daten **interpoliert**:

$$p(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

(p = Polynom, trigonometrisches Polynom, rationale Funktion)

Zunächst: Klassische Polynom–Interpolation

Bestimme ein Polynom höchstens n–ten Grades

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

das die gegebenen Daten interpoliert.

Erster Lösungsansatz: Interpolationsbedingungen ergeben ein LGS

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n &= f_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n &= f_1 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots &= \vdots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n &= f_n
\end{aligned}$$

Vandermonde–Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Es gilt (Beweis mittels vollständiger Induktion)

$$\det V(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

Satz: Sind die Knoten x_j des Interpolationsproblems paarweise verschieden, d.h.

$$x_i \neq x_j \qquad (i \neq j)$$

so **existiert genau ein** Polynom p_n höchstens n–ten Grades, das die Interpolationsbedingungen

$$p_n(x_j) = f_j \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

erfüllt.

Aber:
LGS mit Vandermonde–Matrix ist **numerisch** zu kompliziert!

7.2 Interpolationsformeln nach Lagrange und Newton

Interpolation nach Lagrange:

Wir definieren

$$l_j(x) := \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{j-1})\cdot(x-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_j-x_{j-1})\cdot(x_j-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x_j-x_n)}$$

$$= \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}$$

Dann gilt für alle $j = 0, \ldots, n$:

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 1 & : \quad i = j \\ 0 & : \quad i \neq j \end{cases}$$

Also wird die Interpolationsaufgabe gelöst durch das Polynom $p_n(x)$

$$p_n(x) := f_0 l_0(x) + \ldots + f_n l_n(x) = \prod_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

Beispiel: Wir betrachten die Daten

x_j	0	1	2	3
f_j	0	0	4	18

Dann gilt:

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \quad l_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \quad l_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$

Das Polynom ist dann:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= 4 \cdot l_2(x) + 18 \cdot l_3(x) \\ &= -4\,\frac{x(x-1)(x-3)}{2} + 18\,\frac{x(x-1)(x-2)}{6} \\ &= x^3 - x^2 \end{aligned}$$

Interpolation in der Newton–Darstellung:

Das Interpolationsproblem wird auch gelöst durch das Newton–Polynom

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \\ &= c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

mit geeigneten Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$.

Insbesondere gilt dann:

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= c_0 \\ p_n(x_1) &= c_0 + c_1(x_1 - x_0) \\ p_n(x_2) &= c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Was sind die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$?

$$
\begin{aligned}
p_n(x_0) &= c_0 \overset{!}{=} f_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = f_0 \\
p_n(x_1) &= c_0 + c_1(x_1 - x_0) \overset{!}{=} f_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \\
\vdots &= \vdots \\
p_n(x_n) &= \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x_n - x_j) \\
&= c_0 + c_1(x_n - x_0) + \ldots + c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1} \\
&\overset{!}{=} f_n \\
\Rightarrow \quad c_n &= \frac{1}{\prod_{j=0}^{n-1}(x_n - x_j)} \left(f_n - \sum_{j=0}^{n-1} c_j \prod_{i=0}^{j-1} (x_n - x_i) \right)
\end{aligned}
$$

Folgerungen:

1) Zur Berechnung von c_j benötigt man nur die ersten $(j+1)$ Punkte $(x_0, f_0), \ldots, (x_j, f_j)$.
Notation:

$$c_j = f[x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j] \qquad (j = 0, 1, \ldots, n)$$

2) Nimmt man eine Stützstelle (x_{n+1}, f_{n+1}) hinzu, so gilt:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + c_{n+1} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

mit

$$c_{n+1} = \frac{f_{n+1} - p_n(x_{n+1})}{\prod_{j=0}^{n} (x_{n+1} - x_j)}$$

Methoden zur Polynomwertberechnung:

Auswertung eines gegebenen Polynoms über das **Horner–Schema:**

Sei $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

Man berechnet $p(\xi)$ an einer festen Stelle ξ mittels

$$p(\xi) = a_0 + \xi(a_1 + \xi(a_2 + \xi(\ldots(a_{n-1} + a_n \xi)\ldots)$$

Rekursive Darstellung:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_k &= a_{k+1} + \xi b_{k+1}, \quad k = n-2, \ldots, 1, 0 \\ b_{-1} &= a_0 + \xi b_0 \end{aligned}$$

Dann gilt $p(\xi) = b_{-1}$.

(Effiziente) Berechnung des Newton–Polynoms über

Methode der dividierten Differenzen

Satz: Definiert man die sogenannten dividierten Differenzen mittels

$$
\begin{aligned}
f[x_j] &= f_j \qquad j = i, i+1, \ldots, i+k \\
f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}
\end{aligned}
$$

so gilt

$$c_j = f[x_0, x_1, \ldots, x_j],$$

d.h. die dividierten Differenzen ergeben gerade die Koeffizienten des Newton–Polynoms.

Berechnungsschema zu den dividierten Differenzen (für $n = 3$):

x	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
x_0	f_0			
x_1	f_1	$f[x_0, x_1]$		
x_2	f_2	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	f_3	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

wobei

$$
\begin{aligned}
f[x_j] &= f_j \qquad j = i, i+1, \ldots, i+k \\
f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}
\end{aligned}
$$

Der Interpolationsfehler:

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= f(x) - p_n(x) \\ &= f(x) - \left(p_{n+1}(x) - c_{n+1}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right) \\ &= f[x_0, \ldots, x_n, x]\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\end{aligned}$$

Satz: Sei $f \in C^{n+1}([a,b])$. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$f[x_0, \ldots, x_{n+1}] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Abschätzung für den Interpolationsfehler:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot \left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|$$

Das Knotenpolynom:

Ein Term des Interpolationsfehlers ist das **Knotenpolynom**:

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Optimierungsproblem:

Bestimme die Knoten $x_0, x_1, \ldots, x_n$, so dass

$$\max_{x_0,\ldots,x_n \in [a,b]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

für $x \in [a, b]$ minimal ist.

Lösung: Tschebyscheff–Knoten auf $[-1, 1]$:

$$x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right) \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

6.3 Spline–Interpolation

Sei Δ_n eine Unterteilung des Intervalls $[a,b]$:

$$\Delta_n \quad : \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

mit Teilintervallen $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Definition: (Kubischer Spline)

Eine Funktion $S : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **kubischer Spline**, falls

1) $S \in C^2([a,b])$, d.h. S ist zweimal stetig differenzierbar,

2) S ist auf jedem Teilintervall ein Polynom dritten Grades:

$$S(x) = s_j(x) = a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3$$

für $x \in [x_{j-1}, x_j]$ und $j = 1, \ldots, n$.

Interpolation der Daten $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$ mit kubischen Splines.

Ein kubischer Spline besitzt also $4n$ Parameter, die folgendermaßen bestimmt werden:

1) Interpolationseigenschaft:

$$s_j(x_{j-1}) = f_{j-1}, \quad s_j(x_j) = f_j \qquad \forall\, j = 1, \ldots, n$$

2) Stetigkeit der Ableitung:

$$s_j'(x_j) = s_{j+1}'(x_j) \qquad \forall\, j = 1, \ldots, n-1$$

3) Stetigkeit der zweiten Ableitung:

$$s_j''(x_j) = s_{j+1}''(x_j) \qquad \forall\, j = 1, \ldots, n-1$$

Dies sind $(4n-2)$ Gleichungen, es fehlen also noch zwei Bedingungen.

Definition: Ein kubischer Spline heißt

1) **natürlicher Spline**, falls gilt: $S''(a) = S''(b) = 0$,

2) **periodischer Spline**, falls gilt: $S^{(i)}(a) = S^{(i)}(b)$, $i = 0, 1, 2$,

3) **allgemeiner Spline**, falls (z.B.) gilt: $S'(a) = f'_0$, $S'(b) = f'_n$.

Alle drei Bedingungen ergeben die zwei notwendigen Gleichungen.

Besondere Eigenschaft des natürlichen Splines:

Satz: Unter allen interpolierenden C^2–Funktionen minimiert der **natürliche kubische Spline** das Funktional

$$I[y] := \int_a^b (y''(x))^2 dx$$

Funktional ist ein Maß für die Krümmung der Interpolationsfunktion.

Berechnung des natürlichen kubischen Splines:

Sei S auf dem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$ gegeben durch

$$S(x) = a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
a_j &= f_{j-1} \\
b_j &= \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{2M_{j-1} + M_j}{6} h_j \\
c_j &= \frac{M_{j-1}}{2} \\
d_j &= \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}
\end{aligned}$$

und die **Momente** M_j lösen ein LGS mit Tridiagonalmatrix.

Herleitung des Splines über die Momente M_j:

$$M_j := S''(x_j), \quad j = 0, \ldots, n$$

nennt man **Momentenmethode:** $s_j''(x)$ ist eine Gerade mit

$$s_j''(x) = M_{j-1} + \frac{M - j - M_{j-1}}{h_j}(x - x_{j-1}) \qquad (h_j = x_j - x_{j-1})$$

Integration liefert

$$\begin{aligned} s_j'(x) &= B_j + M_{j-1}(x - x_{j-1}) + \frac{M_j - M_{j-1}}{2h_j}(x - x_{j-1})^2 \\ s_j'(x) &= A_j + B_j(x - x_{j-1}) + \frac{M_{j-1}}{2}(x - x_{j-1})^2 + \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}(x - x_{j-} \end{aligned}$$

mit den Integrationskonstanten A_j, B_j.

Aus

$$s_j(x_{j-1}) = f_{j-1} \qquad s_j(x_j) = f_j$$

folgt direkt

$$A_j = f_{j-1} \qquad B_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(M_j + 2M_{j-1}) \qquad (*)$$

Stetigkeit von S' an den Punkten x_j, $j = 1, \ldots, n-1$ ergibt

$$s_j'(x_j) = s_{j+1}'(x_j) \quad \Rightarrow \quad B_j + \frac{M_j + M_{j-1}}{2} h_j = B_{j+1}$$

Einsetzen von $(*)$ ergibt dann:

$$\frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_j + h_{j+1}}{3} M_j + \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} = \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j}$$

für $j = 1, \ldots, n-1$.

Tridiagonalsystem für $M_0, \ldots, M_n$ mit $S''(a) = S''(b) = 0$ lautet

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

mit $h_j = x_j - x_{j-1}$ und

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \quad \mu_j = 1 - \lambda_j$$

$$d_j = \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left(\frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right)$$

für $j = 1, \ldots, n-1$ sowie den Randwerten

$$\lambda_0 = 0, \quad d_0 = 0, \quad \mu_n = 0, \quad d_n = 0$$

Abschließende Bemerkungen:

1) Die Berechnung des (natürlichen) kubischen Splines ist relativ leicht, da das Tridiagonalsystem direkt gelöst werden kann.

2) Ein Spline oszilliert weit weniger als klassische Interpolationspolynome, denn er minimiert die Krümmung.

3) Nimmt man immer mehr Stützstellen hinzu, so konvergiert der Spline mit der Ordnung h^4 gegen die Ausgangsfunktion.

4) Schreibt man als Randbedingungen die ersten Ableitungen vor, d.h.

$$S'(a) = f'_0, \qquad S'(b) = f'_n$$

so erhält man ebenfalls ein Tridiagonalsystem, allerdings mit anderen Werten für λ_0, d_0, μ_n und d_n.

5) Beim periodischen Spline erhält man bei der Lösung **kein** Tridiagonalsystem.

Kapitel 8: Integration

Erläuterung auf Folie

8.1 Das bestimmte Integral

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine **beschränkte** Funktion auf einem (zunächst) kompakten Intervall $[a,b]$.

Definition: 1) Eine Menge der Form

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

nennt man eine **Zerlegung (Partition, Unterteilung)** des Intervalls $[a,b]$. Die **Feinheit** der Zerlegung ist dabei

$$\|Z\| = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$$

Man bezeichnet mit $\mathbf{Z}$ bzw. $\mathbf{Z}[a,b]$ die Menge aller Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$.

Definition: 2) Jede Summe der Form

$$R_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad (x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1})$$

nennt man eine **Riemannsche Summe** der Zerlegung Z,

$$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf f([x_i, x_{i+1}])\ (x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die **Untersumme** von $f(x)$ zur Zerlegung Z,

$$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup f([x_i, x_{i+1}])\ (x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die **Untersumme** von $f(x)$ zur Zerlegung Z.

Beobachtung:

Aus den Definitionen folgt direkt:

1) Für **feste** Zerlegungen gilt stets:

$$U_f(Z) \le R_f(Z) \le O_f(Z)$$

2) Ist Z_1 eine **feinere** Zerlegung als Z_2, i.e. $Z_2 \subset Z_1$, so gilt:

$$U_f(Z_2) \le U_f(Z_1) \qquad O_f(Z_1) \le O_f(Z_2)$$

3) Für zwei **beliebige** Zerlegungen Z_1 und Z_2 gilt daher:

$$U_f(Z_1) \le O_f(Z_2)$$

und

$$U_f(Z_2) \le O_f(Z_1)$$

Konsequenzen:

1) Es existieren die Grenzwerte über immer feinere Zerlegungen:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \quad := \quad \mathsf{sup}\{U_f(Z) \ : \ Z \in \mathbf{Z}[a,b]\} \qquad \textbf{(Unterintegral)}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \quad := \quad \mathsf{inf}\{O_f(Z) \ : \ Z \in \mathbf{Z}[a,b]\} \qquad \textbf{(Oberintegral)}$$

2) Eine Funktion $f(x)$ heißt **(Riemann–) integrierbar** über $[a,b]$, falls Unter– und Oberintegral übereinstimmen:

$$\int_a^b f(x)dx := \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

nennt man das **(Riemann–) Integral von $f(x)$ über $[a,b]$.**

Beispiele: 1) Die konstante Funktion $f(x) = c$ **ist integrierbar**:

$$U_f(Z) = O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} c\,(x_{i+1} - x_i) = c\,(b-a) \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx = c\,(b-a)$$

2) Sei $f(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$ und $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$:

$$U_f(Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$O_f(Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$$

Beispiele:

3) Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & : \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann gilt für **jede** Zerlegung: $U_f(Z) = 0, \quad O_f(Z) = 1.$

Also ist die Funktion **nicht** integrierbar.

4) Sei $a \leq c \leq b$ und $f(x)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \neq c \\ 1 & : \quad x = c \end{cases}$$

Die Funktion ist integrierbar mit $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, denn

$$U_f(Z) = 0 \qquad 0 < O_f(Z) < 2\|Z\|$$

Satz: Seien $f(x)$ und $g(x)$ integrierbar auf $[a,b]$. Dann gelten:

1) f ist integrierbar auf $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ f integrierbar auf $[a,c]$ und $[c,b]$.
Zusätzlich gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2) **Linearität**: Auch $\alpha f(x) + \beta g(x)$ ist integrierbar:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

3) **Positivität**:

$$\forall\, x \in [a,b] \;:\; f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Satz: (Fortsetzung)

4) **Abschätzungen**:

$$(b-a)\cdot \inf(f[a,b]) \;\leq\; \int_a^b f(x)dx \;\leq\; (b-a)\cdot \sup(f[a,b])$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \;\leq\; (b-a)\cdot \sup\{|f(x)| \,:\, a\leq x\leq b\}$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \;\leq\; \int_a^b |f(x)|dx$$

Bei der letzten Abschätzung muß $|f(x)|$ integrierbar sein.

Bemerkungen:

1) Die erste Aussage gilt für beliebige Anordnungen von a, b, c.
Man definiert daher

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

sowie

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2) Ist $f(x)$ integrierbar, so gilt stets

$$R_f(Z_m) \to \int_a^b f(x)dx$$

sofern $\|Z_m\| \to 0$ für $m \to \infty$.

8.2 Kriterien für Integrierbarkeit

Satz: (Riemannsches Kriterium)
Für eine **beschränkte** Funktion $f(x), a \leq x \leq b$, sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) $f(x)$ ist integrierbar über $[a, b]$.

2) $\forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists \ Z \in \mathbf{Z}[a, b] \quad : \quad O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$

Satz:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt:

1) Ist $f(x)$ **monoton**, so ist $f(x)$ integrierbar.

2) Ist $f(x)$ **stetig**, so ist $f(x)$ integrierbar.

Beweis zu 2):
Die Funktion ist stetig auf $[a, b]$, also auch gleichmäßig stetig, da $[a, b]$ kompakt.
Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ passend, so dass

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Dann gilt für eine Zerlegung Z mit $\|Z\| < \delta$:

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{j=0}^{n-1} (\sup f[x_j, x_{j+1}] - \inf f[x_j, x_{j+1}])(x_{j+1} - x_j) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\varepsilon}{b - a}\right) \cdot (x_{j+1} - x_j) = \varepsilon \end{aligned}$$

Nach dem Riemannschen Kriterium ist damit $f(x)$ integrierbar.

Satz: Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Dann gelten:

1) Das Produkt $f(x) \cdot g(x)$ ist integrierbar.

2) Gilt $g(x) \geq C > 0$, so ist der Quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ integrierbar.

3) Die folgenden Funktionen sind integrierbar:

$$|f|(x) \;:=\; |f(x)|$$

$$f^+(x) \;:=\; \begin{cases} f(x) & : \; f(x) \geq 0 \\ 0 & : \; f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) \;:=\; \begin{cases} 0 & : \; f(x) \geq 0 \\ -f(x) & : \; f(x) < 0 \end{cases}$$

Beweis zu 1): Rückführung auf Riemannsches Kriterium:
Sei $Z \in \mathbf{Z}[a,b]$ eine feste Zerlegung. Dann gilt:

$$O_{f\cdot g} - U_{f\cdot g} = \sum_{j=0}^{n-1} (\sup(f\cdot g)[x_j, x_{j+1}] - \inf(f\cdot g)[x_j, x_{j+1}])(x_{j+1} - x_j)$$

Man berechnet:

$$\begin{aligned} s_j &:= \sup(f\cdot g)[x_j, x_{j+1}] - \inf(f\cdot g)[x_j, x_{j+1}] \\ &= \sup_{x,y} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\ &= \sup_{x,y} |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq \|f\|_\infty \sup_{x,y} |g(x) - g(y)| + \|g\|_\infty \sup_{x,y} |f(x) - f(y)| \end{aligned}$$

Wir erhalten also die Abschätzung

$$O_{f\cdot g} - U_{f\cdot g} \leq \|f\|_\infty \cdot (O_g - U_g) + \|g\|_\infty \cdot (O_f - U_f)$$

Frage: Stetige Funktionen sind integrierbar. Was ist mit

Funktionen mit Unstetigkeitstellen?

Insbesondere: **stückweise stetige Funktionen**

Satz: Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann (Riemann)–integrierbar, falls die Menge Unst(f) ihrer Unstetigkeitsstellen eine so genannte **Lebesgue–Nullmenge** ist, d.h., falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, [a_i, b_i]_{i \in \mathbb{N}} \;:$$

$$\text{Unst}(f) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon$$

8.3 Hauptsatz und Anwendungen

Definition:

Gegeben seien Funktionen $F, f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ist $F(x)$ differenzierbar auf $[a, b]$, und gilt: $F'(x) = f(x)$, $a \le x \le b$, so heißt

$F(x)$ eine **Stammfunktion** von $f(x)$.

Bemerkung:

1) Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so sind auch alle Funktionen der Form

$$\tilde{F}(x) = F(x) + c$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f(x)$.

2) Sind $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$, so ist die Funktion $F_1(x) - F_2(x)$ konstant.

Satz: (Hauptsatz der Integral– und Differentialrechnung)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

1) Die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

2) Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Beweis: Teil 1): Wir müssen zeigen, dass

$$F'(x) = f(x)$$

Sei $h \neq 0$ so, dass $x, x+h \in [a,b]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| \\
= \quad & \frac{1}{|h|} \left| \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt - \int_x^{x+h} f(x)dt \right| \\
= \quad & \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right| \\
\leq \quad & \sup\{\, |f(t) - f(x)| \,:\, |t-x| \leq h \wedge t \in [a,b]\} \\
\to \quad & 0 \qquad (h \to 0),
\end{aligned}$$

da die Funktion $f(x)$ stetig ist.

Beweis: Teil 2): Nach der Bemerkung und Teil 1) gilt

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C \qquad (C = \text{ Konstante})$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_a^b f(t)dt + C \\ F(a) &= \underbrace{\int_a^a f(t)dt}_{=0} + C \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Bemerkungen:

1) Teil 1) des Hauptsatzes gilt auch für stückweise stetige Funktionen $f(x)$. An den Unstetigkeitsstellen ist die Stammfunktion allerdings nur

einseitig differenzierbar

und

$$F'(x^-) = \lim_{t \to x^-} f(t) \qquad F'(x^+) = \lim_{t \to x^+} f(t)$$

2) Eine beliebige Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ nennt man auch

das unbestimmte Integral

von $f(x)$ und schreibt

$$F = \int f(x) dx$$

Die Funktion F ist dann nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

Beispiele: Wir bezeichnen mit C stets die **Integrationskonstante**:

$$\begin{aligned}
\int x^n \, dx &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad (n \neq -1) \\
\int \frac{1}{x} \, dx &= \ln |x| + C \qquad (x \neq 0) \\
\int \sin x \, dx &= -\cos x + C \\
\int \cos x \, dx &= \sin x + C \\
\int \frac{1}{1+x^2} \, dx &= \arctan x + C \\
\int \frac{1}{1-x^2} \, dx &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C
\end{aligned}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax} + C \qquad (a \neq 0) \\
\int b^{x}\,dx &= \frac{1}{\ln b}b^{x} + C \qquad (b > 0, x > 0) \\
\int \ln x\,dx &= x(\ln x - 1) + C \qquad (x > 0) \\
\int \log_b x\,dx &= \frac{x}{\ln b}(\ln x - 1) + C \qquad (b > 0, x > 0) \\
\int \sinh x\,dx &= \cosh x + C \\
\int \cosh x\,dx &= \sinh x + C
\end{aligned}$$

Satz: (Integrationsregeln)

1) **Linearität:**
Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, so gilt

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

2) **Partielle Integration:**
Sind $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int u(x) v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx$$

und für die bestimmten Integrale folgt:

$$\int_a^b u(x) v'(x)\, dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx$$

Satz: (Integrationsregeln)

3) **Substitutionsregel:**
Ist $h : [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar und $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion $F(x)$, so gilt:

$$\int f(h(t))h'(t)\,dt = F(h(t))$$

Bei bestimmten Integralen erhalten wir demnach:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(h(t))h'(t)\,dt &= \int_{h(a)}^{h(b)} f(x)\,dx \\ &= F(h(b)) - F(h(a)) \end{aligned}$$

Beweis: 1): Integration ist linearer Operator, 2): Produktregel,
3): Kettenregel.

Beispiele:

1) Wir berechnen (Linearität):

$$\int (28x^3 + 12x^2 - 2x + 3)\,dx = 7x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + C$$

2) Partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int xe^x\,dx &= xe^x - \int e^x\,dx \\ &= (x-1)e^x + C \end{aligned}$$

3) Partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int \ln x\,dx &= \int 1 \cdot \ln x\,dx \\ &= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= x(\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

Beispiele:

4) Partielle Integration:

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x\,dx &= \int \sin x \cdot \sin x\,dx \\
&= \sin x(-\cos x) + \int \cos^2 x\,dx \\
&= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx \\
\Rightarrow \quad 2\int \sin^2 x\,dx &= -\sin x \cos x + x + C \\
\Rightarrow \quad \int \sin^2 x\,dx &= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C
\end{aligned}
$$

Beispiele:

5) Substitution $x = h(t) = a\cos t$ beim Integral

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx = \int_{\pi}^{0} \sqrt{1 - \cos^2 t}(-a \sin t)\, dt$$

denn

$$dx = -a \sin t \; dt \quad h(0) = a \quad h(\pi) = -a$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx &= \int_{\pi}^{0} \sqrt{1 - \cos^2 t}\; (-a \sin t)\, dt \\ &= a \int_{0}^{\pi} \sin^2 t\, dt \\ &= a(t - \sin t \cos t) \,\Big|_0^{\pi} = \frac{a\pi}{2} \end{aligned}$$

6) Substitution $x = h(t) = t^2, t \geq 0$ beim Integral

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx = \int e^t\, 2t\, dt$$

denn

$$h'(t) = 2t$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x}}\, dx &= \int e^t\, 2t\, dt \\ &= 2(t-1)e^t + C \\ &= 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C\end{aligned}$$

Wichtige Beobachtung:

Nicht jedes Integral läßt sich **explizit** lösen,
d.h. die Stammfunktion ist nicht immer durch elementare Funktionen darstellbar.

Beispiele:

$$\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad \text{(Integralsinus)}$$

$$\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad \text{(Fehlerfunktion)}$$

$$\mathrm{E}(x,k) := \int_0^x (1-k^2\sin^2 t)^{\pm\frac{1}{2}}\,dt \qquad \text{(Elliptische Integrale)}$$

Satz: (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $p(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b p(x)\,dx$$

Beweis: Da $f(x)$ stetig und $p(x) \geq 0$ folgt:

$$\mathrm{min}(f[a,b]) \cdot p(x) \leq f(x)p(x) \leq \mathrm{max}(f[a,b]) \cdot p(x)$$

Integration liefert:

$$\mathrm{min}(f[a,b]) \cdot \int_a^b p(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)p(x)\,dx \leq \mathrm{max}(f[a,b]) \cdot \int_a^b p(x)\,dx$$

Behauptung folgt dann aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.

Bemerkung:

Für den Spezialfall $p(x) = 1$ gibt es damit ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

Schreibt man diese Beziehung als

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a)$$

mit der Stammfunktion $F(x)$, so folgt

$$\exists\, \xi \in [a, b] \quad : \quad F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Stammfunktion $F(x)$.

Bemerkung: Taylor–Entwicklung mittels **partieller Integration**:

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} (x-t)^0 f'(t)\,dt \\
&= (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)^1 f''(t)\,dt \\
&\vdots \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt
\end{aligned}$$

Restgliedformel nach Lagrange aus Mittelwertsatz:

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

8.4 Integration rationaler Funktionen

Rationale Funktionen

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Integration erfolgt über die

Partialbruch–Zerlegung

einer rationalen Funktion.
Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) \quad &= \quad p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\ &\quad + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1} x + \delta_{j1}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j} x + \delta_{jk_j}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^{k_j}} \right] \end{aligned}$$

8.4 Integration rationaler Funktionen

Rationale Funktionen

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Integration erfolgt über die

Partialbruch–Zerlegung

einer rationalen Funktion.
Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) &= p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\ &\quad + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^{k_j}} \right] \end{aligned}$$

Erläuterungen:

1) Wir haben angenommen, dass $p(x)$ und $q(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen besitzen.

2) Das Polynom $p_1(x)$ tritt nur auf, falls

$$\text{deg } p \geq \text{deg } q$$

In diesem Fall berechnet man $p_1(x)$ mittels **Polynomdivision**.

3) Bei der verbleibenden rationalen Funktion

$$\frac{p_2(x)}{q_2(x)} = R(x) - p_1(x)$$

besitzt der Nenner $q_2(x)$

- die **reellen** Nullstellen x_j mit Vielfachheit k_j
- die **komplexen** Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ mit Vielfachheit k_j
- und damit komplex konjugierte Nullstellen $\bar{z}_j = a_j - ib_j$

Ansatz:

$$R(x) \;=\; p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right]$$
$$+ \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^{k_j}} \right]$$

Parameter, die berechnet werden müssen

$$\alpha_{jl}, \quad j = 1, \ldots, n_1,\ l = 1, \ldots, k_j$$
$$\gamma_{jl}, \quad j = n_1 + 1, \ldots, n_2,\ l = 1, \ldots, k_j$$
$$\delta_{jl}, \quad j = n_1 + 1, \ldots, n_2,\ l = 1, \ldots, k_j$$

Dies erfolgt über **Koeffizientenvergleich**,
d.h. die rechte Seite wird auf den Hauptnenner gebracht.

Beispiel: Wir betrachten die rationale Funktion

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{x^2+1} \\ \Rightarrow \quad 1-x &= x(x^2+1)\alpha_1 + (x^2+1)\alpha_2 + x^2(\gamma_1 x + \delta_1) \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren:

$$1-x = (\alpha_1+\gamma_1)x^3 + (\alpha_2+\delta_1)x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

Koeffizientenvergleich:

$$\alpha_1+\gamma_1 = 0, \quad \alpha_2+\delta_1 = 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1$$

Partialbruchzerlegung:

$$R(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

Bei der Integration rationaler Funktionen gibt es **4 Grundtypen**:

1) **Polynome:**

$$\int \sum_{k=0}^{s} c_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{s} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

2) **Inverse Potenzen:**

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^l} = \begin{cases} \ln|x-x_0| + C & : \quad l = 1 \\ \dfrac{1}{1-l} \cdot \dfrac{1}{(x-x_0)^{l-1}} + C & : \quad l = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

3) **Inverse Quadrate:**

$$I_l := \int \frac{1}{(t^2+1)^l} \, dt \qquad (l \in \mathbb{N})$$

$$I_l = \frac{1}{2(1-l)} \left[(3-2l) I_{l-1} - \frac{t}{(t^2+1)^{l-1}} \right], \qquad l = 2, 3, \ldots$$

Zunächst gilt:

$$I_1 = \int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \arctan t + C$$

Herleitung einer Rekursionsformel für $l > 1$:
Mittels Substitution:

$$\begin{aligned}\int \frac{2t}{(t^2+1)^l}\, dt &= \int \frac{du}{u^l} = \frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{u^{l-1}} + C \\ &= \frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{(t^2+1)^{l-1}} + C\end{aligned}$$

Mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned}I_{l-1} &= \int \frac{1}{(t^2+1)^{l-1}}\, dt = \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^l}\, dt = \int \frac{t}{2} \cdot \frac{2t}{(t^2+1)^l}\, dt + I_l \\ &= \frac{1}{2(1-l)(t^2+1)^{l-1}} - \frac{1}{2(1-l)} \cdot I_{l-1} + I_l\end{aligned}$$

4) **Wie Typ 3), aber Zähler linear:**

$$\int \frac{cx+d}{[(x-a)^2+b^2]^l}\,dx = \frac{c}{2}\int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^l}\,dx$$
$$+(d+c\cdot a)\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^l}$$

Erstes Integral:

$$\int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^l}\,dx = \int \frac{du}{u^l}$$
$$= \begin{cases} \ln|(x-a)^2+b^2|+C & : \; l=1 \\ \dfrac{1}{1-l}\cdot\dfrac{1}{[(x-a)^2+b^2)^l]}+C & : \; l=2,3,. \end{cases}$$

Zweites Integral:

$$\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^l} = \frac{1}{b^{2l-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^l} \qquad \text{mit} \quad t=\frac{x-a}{b}$$

Beispiel: Wir betrachten wiederum die rationale Funktion

$$\begin{aligned}
R(x) &= \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} \\
&= -\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{x-1}{x^2+1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \int R(x)\,dx = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + C$$

Bemerkung: Substitution bei anderen Integralen:

1)

$$\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(t)}{t}\,dt$$

2)

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

8.5 Uneigentliche Integrale

Integrale über unbeschränkte Bereiche

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \quad \int_{\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Integrale über unbeschränkte Funktionen mit Singularitäten am Rand

$$\int_a^b f(x)\,dx,\ f : (a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig},\ f : [a,b) \to \mathbb{R} \text{ stetig}$$

Lokale Integrierbarkeit:

Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt **lokal integrierbar**, falls sie über jedem kompakten Intervall $[a,b] \subset D$ integrierbar ist.

Ist $f(x)$ lokal integrierbar, so kann man folgende Grenzwerte betrachten:

$$a \to \infty \qquad b \to \infty$$

Definition: Ist eine Funktion lokal integrierbar, so definiert man

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx \;:=\; \lim_{x\to\infty} \int\limits_a^x f(x)\,dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx \;:=\; \lim_{x\to-\infty} \int\limits_x^b f(x)\,dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx \;:=\; \int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int\limits_a^\infty f(x)\,dx$$

Bemerkung: Der **Cauchysche Hauptwert** ist definiert als

$$\text{CHW} \int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \lim_{x\to\infty} \int\limits_{-x}^x f(x)\,dx$$

und im Allgemeinen **nicht identisch** mit obigem Integral!

Definition: Die Funktion $f(x)$ sei lokal integrierbar über $(a, b]$ bzw. $[a, b)$ oder (a, b). Dann definiert man

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Bemerkung: Der **Cauchysche Hauptwert** ist definiert als

$$\text{CHW} \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right)$$

Beispiel:

1) Wegen

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}\,\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} + C & : \quad \alpha > 1 \\ \ln|x| + C & : \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha = 1$.

2) Folgendes uneigentliche Integral besitzt den Wert 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2}\,dx$$

Satz: (Konvergenzkriterien)

Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar.

1) Das uneigentliche Integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ existiert genau dann, wenn gilt

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;:\; \exists\,C > a \;:\; \forall\,z_1, z_2 > C \;:\; \left| \int\limits_{z_1}^{z_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

2) Ist das uneigentliche Integral absolut konvergent, d.h. das uneigentliche Integral $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergiert, so konvergiert auch $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

Satz: (Konvergenzkriterien)

3) **Majorantenkriterium**

$$\forall\, x \;:\; |f(x)| \leq g(x) \;\wedge\; \int\limits_a^\infty g(x)\,dx \quad \text{konvergent}$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{absolut konvergent}$$

4) Weiter gilt folgende Umkehrung:

$$\forall\, x \;:\; 0 \leq g(x) \leq f(x) \;\wedge\; \int\limits_a^\infty g(x)\,dx \quad \text{divergent}$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{divergent}$$

Beispiele:

1) Das sogenannte **Dirichlet–Integral**

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$$

ist konvergent:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin t}{t}\, dt = -\frac{\cos t}{t}\Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$$

und damit

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| \le \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{2}{z_1} \to 0 \quad (z_1 \to \infty)$$

Das Dirichlet–Integral besitzt den Wert $\pi/2$.

Beispiele:

2) Das **Exponentialintegral**

$$\mathrm{Ei}(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt \qquad (x < 0)$$

ist für alle $x < 0$ absolut konvergent.

3) Die **Gamma–Funktion** $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

Die Gamma–Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad x > 0$$

und es gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

8.6 Parameterabhängige Integrale

Beispiel: Die Gamma–Funktion von der letzten Folie

$$\Gamma(x) := \int\limits_0^\infty f(x,t)\,dt = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

Zunächst: Parameterabhängige eigentliche Integrale

Sei $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, sodass f für festes $x \in I$ als Funktion von y integrierbar über $[a,b]$ ist:

$$F(x) := \int\limits_a^b f(x,y)\,dy$$

Fragen:

1) Ist die Funktion $F(x)$ **stetig**, wenn $f(x,y)$ stetig ist?
2) Ist die Funktion $F(x)$ **differenzierbar**, wenn $f(x,y)$ nach der Variablen x differenzierbar ist?

Satz: (Stetigkeit parameterabhängiger Integrale)

Ist $f(x, y)$ stetig auf $I \times [a, b]$, so existiert das Integral

$$F(x) := \int_a^b f(x, y)\, dy$$

für alle $x \in I$, und $F(x)$ ist stetig auf I.

Satz: (Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale)

Ist $f(x, y)$ stetig und nach x stetig (partiell) differenzierbar, so ist auch $F(x)$ auf dem Intervall stetig differenzierbar (mit eventuell einseitigen Ableitungen an den Rändern von I), und es gilt:

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy$$

Beispiel:

1)

$$F(x) = \int_1^\pi \frac{\sin(tx)}{t}\,dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \int_1^\pi \cos(tx)\,dt$$

2) Die **Bessel–Funktion**:

$$J_n(x) \; := \; \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)\,dt \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

$$J_n'(x) \; = \; -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t \cdot \sin(x\sin t - nt)\,dt$$

Die Bessel–Funktion $J_n(x)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0$$

Parameterabhängige **uneigentliche** Integrale:

$$F(x) := \int_a^\infty f(x,y)\,dy$$

Beispiel: Die Gamma–Funktion von oben

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

Definition:

Das Integral $\int_a^\infty f(x,y)\,dy$, $x \in I$ heißt **gleichmäßig konvergent**, falls es zu $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C > a$ gibt, sodass gilt:

$$\forall\, x \in I \ :\ \forall\, y_1, y_2 \geq C \ :\ \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x,y) \right| dy < \varepsilon$$

Bemerkung: Majorantenkriterium:

$$\forall\, x \in I \quad : \quad |f(x,y)| \le g(y) \;\wedge\; \int_a^\infty g(y)\,dy \quad \text{konvergent}$$

$$\Rightarrow \qquad \int_a^\infty f(x,y)\,dy, \quad x \in I \quad \text{gleichmäßig konvergent.}$$

Das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy$$

konvergiert gleichmäßig (und absolut), falls $f(x,y)$ eine gleichmäßige Majorante besitzt.

Satz: Ist $f(x, y)$ stetig, nach x stetig (partiell) differenzierbar und sind die Integrale

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy \quad \text{und} \quad \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

auf kompakten Teilmengen von I gleichmäßg konvergent, so ist auch $F(x)$ stetig differenzierbar, und die Ableitung läßt sich durch Differentiation unter dem Integralzeichen gewinnen:

$$F'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

Beispiel:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt \quad \Rightarrow \quad \Gamma'(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \cdot \ln t\,dt$$

9 Anwendungen der Integralrechnung

9.1 Rotationskörper

Betrachte einen Funktionsgraphen $y = f(x)$, der um die x–Achse rotiert:
Für die Querschnittsfläche gilt

$$Q(x) = \pi(f(x))^2$$

Damit ergibt sich die Volumenformel:

$$V_{rot} = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Prinzip von Cavalieri: Haben zwei Körper die gleiche Querschnittsfläche, so sind ihre Volumina gleich.

Beispiel: Durch die Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a, b > 0)$$

um die x–Achse erhält man ein Rotationsellipsoid mit dem Volumen

$$\begin{aligned} V_{rot} &= \pi \int_{-a}^{a} \left[b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right]^2 \quad dx \\ &= \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) dx \\ &= \frac{4}{3}\pi a b^2 \end{aligned}$$

Volumen einer Kugel: Für $a = b = r$ ergibt sich

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Oberfläche eines Rotationskörpers:

$$O_{rot} = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$

Beispiel:

Für die Oberfläche einer Kugel gilt mit

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

die Formel

$$O_{Kugel} = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 4\pi r^2$$

9.2 Kurven und Bogenlänge

Definition:

1) Eine stetige Funktion $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt eine **Kurve** im $\mathbb{R}^n$ (auch **Parameterdarstellung einer Kurve**).
$c(a)$ heißt der Anfangspunkt, $c(b)$ der Endpunkt der Kurve c.
Eine Kurve heißt **geschlossen**, falls $c(a) = c(b)$.

2) Ist die Abbildung $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine C^1–Abbildung, d.h., ist jede Koordinatenfunktion $c_j(t)$ von $c = (c_1, \ldots, c_n)$ stetig differenzierbar, so heißt $c(t)$ eine C^1**–Kurve**.
$c(t)$ heißt **stückweise** C^1**–Kurve**, falls es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ gibt, sodass $c(t)$ auf jedem Teilintervall $[t_j, t_{j+1}]$ eine C^1–Funktion ist.

3) Eine C^1–Kurve c heißt **glatt**, falls

$$\forall\, t \in [a,b] \quad \dot{c}(t) = (\dot{c}_1(t), \ldots, \dot{c}_n(t))^T \neq 0.$$

Beispiele:

1) Die Kurve

$$c(t) := (\cos t, \sin t)^T \qquad t \in [0, 2\pi]$$

beschreibt einen **Kreis** im $\mathbb{R}^2$.

2) Die Kurve

$$c(t) = (rt - a\sin t, r - a\cos t)$$

beschreibt eine **Zykloide**.
Wegen

$$\dot{c}(t) = (r - a\cos t, a\sin t)^T$$

ist die Kurve im Fall $r = a$ an den Stellen $t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, nicht glatt!

Beispiele:

3) Die Kurve

$$c(t) = (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t), ht)^T \qquad t \in \mathbb{R}$$

beschreibt eine **Schraubenlinie** mit Radius $r > 0$ und Ganghöhe h.

Ist $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Abbildung, so hat die neue Kurve

$$\tilde{c}(\tau) = c(h(\tau)), \quad \alpha \leq \tau \leq \beta$$

die gleiche Gestalt und gleichen Durchlaufsinn wie die Kurve c:

Parameterwechsel oder **Umparametrisierung**

Bemerkung:

1) Kurven, die durch Parameterwechsel auseinander hervorgehen, werden als gleich angesehen.

2) Im Fall einer C^1–Kurve werden entsprechend nur C^1–Parameterwechsel zugelassen.

3) Jede stetige Funktion $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ läßt sich als eine Kurve auffassen:

$$c(x) := (x, f(x))^T \qquad a \leq x \leq b$$

beziwehungsweise

$$c(t) := (a + t(b - a), f(a + t(b - a)))^T \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Bogenlänge einer Kurve

Sei $Z = \{a = t_0 < t_1 \ldots < t_m = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$:

$$L(Z) := \sum_{j=0}^{m-1} \|c(t_{j+1}) - c(t_j)\|$$

ist eine **untere Schranke** für die Bogenlänge der Kurve $c(t)$.

Definition: Ist die Menge $\{L(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}[a, b]\}$ nach oben beschränkt, so heißt die Kurve c **rektifizierbar**, und

$$L(c) := \sup\{L(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}[a, b]\} = \lim_{\|Z\| \to 0} L(Z)\}$$

ist die **Länge der Kurve** c.

Satz: Jede C^1–Kurve ist rektifizierbar und es gilt:

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt$$

Beweisidee: Zunächst gilt die Darstellung

$$L(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j))^2}$$

und nach dem Mittelwertsatz gibt es Zahlen τ_{k_j} mit $t_j \leq \tau_{k_j} \leq t_{j+1}$, sodass

$$c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j) = \dot{c}_k(\tau_{k_j}) \cdot (t_{j+1} - t_j)$$

Daraus folgt

$$L(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\dot{c}_k(\tau_{k_j}))^2} (t_{j+1} - t_j) \right)$$

Bogenlänge approximiert durch **Riemansche Summe**:

$$R(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\dot{c}_k(t_j))^2} (t_{j+1} - t_j) \right)$$

Zeigen nun mit Hilfe gleichmäßiger Stetigkeit von c, dass für $\|Z\| \to 0$ gilt:

$$|L(Z) - R(Z)| \to 0$$

Weiter gilt:

$$R(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\dot{c}_k(t_j))^2}}_{\|\dot{c}(t)\|} \underbrace{(t_{j+1} - t_j)}_{dt} \right)$$

$$\Rightarrow \quad L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt$$

Beispiel: Länge eines Zykloidenbogens

$$c(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))^T, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Man berechnet:

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= (r(1 - \cos t), r \sin t))^T \\ \|\dot{c}(t)\| &= r\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2r \sin \frac{t}{2} \\ L(c) &= 2r \int\limits_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = 8r \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Bogenlänge einer C^1–Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung:

$$L(c \circ h) = \int\limits_\alpha^\beta \|\dot{c}(h(\tau))h'(\tau)\|\, d\tau = \int\limits_\alpha^\beta \|\dot{c}(h(\tau))\| h'(\tau)\, d\tau = \int\limits_a^b \|\dot{c}(t)\|\, dt = L(c$$

Definition:

1) Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine C^1–Kurve. Die Funktion

$$S(t) := \int\limits_a^t \|\dot{c}(\tau)\| \, d\tau$$

heißt die **Bogenlängenfunktion** von c.

2) Ist c eine glatte C^1–Kurve, so ist $S : [a,b] \to [0, L(c)]$ ein C^1–Parameterwechsel.
Die Umkehrabbildung $t = S^{-1}(s)$, $0 \leq s \leq L(c)$, ist dann ebenfalls ein C^1–Parameterwechsel.
Die entsprechende Parametrisierung

$$\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s)), \quad 0 \leq s \leq L(c)$$

von c nennt man die **Parametrisierung nach der Bogenlänge**.

Bemerkung:

1) Die Ableitung von $\tilde{c}(s)$ ist gegeben durch

$$\tilde{c}\,'(s) = \dot{c}(S^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\| \cdot c(S^{-1}(s))\|}$$

Daher ist $\tilde{c}\,'(s)$ ist ein **Einheitsvektor**, i.e. die Parametrisierung ist derart, dass die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen wird.
Gleichzeitig ist $\tilde{c}\,'(s)$ der **Einheitstangentenvektor**.

2) Aus $\langle(\tilde{c}\,'(s), \tilde{c}\,'(s)\rangle = 1$ folgt durch Differentiation

$$\langle \tilde{c}\,''(s), \tilde{c}\,'(s)\rangle = 0$$

i.e. der **Beschleunigungsvektor** $\tilde{c}\,''(s)$ bezüglich der Bogenlänge steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor.

Bemerkung:

3) Man bezeichnet den Vektor

$$n(s) := \frac{\tilde{c}''(s)}{\|\tilde{c}''(s)\|}$$

als den **Hauptnormalenvektor** der Kurve c.

4) Die Funktion $\kappa(s)$ definiert durch

$$\kappa(s) := \|\tilde{c}''(s)\|, \quad 0 \leq s \leq L(c)$$

nennt man die **Krümmung** der Kurve c.

Beispiel: Parametrisierung des Kreises nach der Bogenlänge:

$$\begin{aligned} \tilde{c}(s) &= (\cos s, \sin s), \quad 0 \leq s \leq 2\pi \\ n(s) &= \tilde{c}''(s) = -(\cos s, \sin s) \\ \kappa(s) &= 1 \end{aligned}$$

Beispiele:

1) Funktionsgraph $y = y(x)$ im $\mathbb{R}^2$: $c(x) = (x, y(x))^T$

$$\begin{aligned} c'(x) &= (1, y'(x))^T \\ ds &= \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx \quad \text{(Bogenlängenelement)} \\ L(c) &= \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx \\ \kappa(x) &= \frac{|y''(x)|}{\left(\sqrt{1 + (y'(x))^2}\right)^3} \end{aligned}$$

2) **Polarkoordinaten** im $\mathbb{R}^2$: $r = r(t), \phi = \phi(t)$

$$c(t) = (r\cos\phi, r\sin\phi)^T, \quad L(c) = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}\,dt$$

Beispiele:

3) **Herzlinie oder Kardiode** in Polarkoordinaten

$$r = a(1 + \cos\phi), \quad a > 0,\ 0 \le \phi \le 2\pi$$

Für den Umfang = Bogenlänge gilt:

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2\phi + a^2(1+\cos\phi)^2}\, d\phi = 2a \int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\phi}{2}\right| \, d\phi = 8a$$

Satz: Für die von einer Kurve im $\mathbb{R}^2$ überstrichene Fläche gilt:

$$F(c) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)\right)\, dt$$

Beweisidee: Berechne Fläche der Teildreiecke

$$|F_i| = \frac{1}{2}\|c(t_i) \times c(t_{i+1})\| = \frac{1}{2}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

Summation über Teildreiecke:

$$\begin{aligned} F(Z) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i}{t_{i+1} - t_i}\,\Delta t_i \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(x_i\,\frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} y_i\right)\,\Delta t_i \end{aligned}$$

Zugehörige **Riemannsche Summe**:

$$R(Z) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}(x_i\dot{y}_i - \dot{x}_i y_i)\,\Delta t_i$$

Im Grenzwert $\|Z\| \to 0$ gilt wiederum $|F(Z) - R(Z)| \to 0$ und man erhält die angegebene Formel.

Beispiel: Die **Archimedische Spirale** in Polarkoordinaten:

$$x = a\,\phi\,\cos\phi, \quad y = a\,\phi\,\sin\phi, \quad a > 0,\ \phi \in \mathbb{R}$$

Berechnung des Umfangs und der Fläche der innersten Schleife:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 + a^2\phi^2}\, d\phi \\ &= \frac{a}{2}\left[\phi\sqrt{1+\phi^2} + \ln\left(\phi + \sqrt{1+\phi^2}\right)\right]\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &\approx 4.158a \end{aligned}$$

und

$$F = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\, d\phi = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \phi^2\, d\phi \approx 1.292a^2$$

9.3 Kurvenintegrale

Definition: Gegeben sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $c : [a, b] \to D$ eine stückweise C^1–Kurve.

Dann wird des **Kurvenintegral (Linienintegral) 1. Art von** $f(x)$ **längs** c definiert durch

$$\int\limits_c f(x)\, ds := \int\limits_a^b f(c(t))\, \|\dot{c}(t)\|\, dt$$

Für eine **geschlossene** Kurve schreibt man auch

$$\oint_c f(s)\, ds$$

Satz: Das Kurvenintegral 1. Art ist unabhängig von der Parametrisierung der betrachteten Kurve.

Beispiel:

1) Krummliniger mit Masse belegter Draht:

$$\int\limits_c \rho(x)\, ds := \int\limits_a^b \rho(c(t))\, \|\dot{c}(t)\|\, dt$$

Gesamtmasse des Drahtes bei inhomogener Belegung $\rho(x)$.

2) Der **Schwerpunkt** des Drahtes liegt bei

$$x_S = \frac{\int\limits_c \rho(x) x\, ds}{\int\limits_c \rho(x)\, ds}$$

3) Das **Trägheitsmoment** des Drahtes ist gegeben durch

$$\theta = \int\limits_c \rho(x) r^2(x)\, ds$$

wobei $r(x)$ der Abstand von der Drehachse ist.

Kapitel 10: Periodische Funktionen, Fourier–Reihen

10.1 Grundlegende Begriffe

Periodische Funktionen

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) heißt **periodisch mit der Periode** T, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(t + T) = f(t)$$

Hauptresultat dieses Kapitels:
Entwicklung einer periodischen Funktion in eine **Fourier–Reihe**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

Grundschwingungen: $\cos(\omega t),\ \sin(\omega t)$
Oberschwingungen: $\cos(k\omega t),\ \sin(k\omega t)$, $k = 2, 3, \ldots$

Bemerkungen:

1) Ist T eine Periode von $f(t)$, so auch kT, $k \in \mathbb{Z}$, eine Periode.
   Sind T_1 und T_2 Perioden, so ist auch $k_1T_1 + k_2T_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, eine Periode.
   Man sagt: Die Menge aller Perioden bildet einen $\mathbb{Z}$–Modul.

2) Existiert eine kleinste positive Periode $T > 0$, so ist die Menge der Perioden gegeben durch kT, $k \in \mathbb{Z}$. Jede nichtkonstante, stetige und periodische Funktion besitzt eine solche kleinste Periode.

3) Sind $f(t)$ und $g(t)$ T–periodisch, so ist auch $\alpha f + \beta g$ T–periodisch.

4) Ist $f(t)$ T–periodisch und integrierbar (über kompakten Intervallen), so gilt für beliebige $a \in \mathbb{R}$:

$$\int\limits_0^T f(t)\,dt = \int\limits_a^{a+T} f(t)\,dt$$

Definition: Eine Funktion $g(t)$, $t \in [0, T]$ bzw. $t \in [0, T/2]$ läßt sich zu einer T–periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortsetzen. Gebräuchlich sind dabei die folgenden Vorgehensweisen:

1) **Direkte Fortsetzung:**

$$f(t) := g(t - kT), \quad kT \leq t < (k + 1)T$$

2) **Gerade Fortsetzung:** Sei $g(t)$ auf $[0, T/2]$ gegeben:

$$f(t) := g(t - kT), \quad \left(\frac{2k - 1}{2}\right) T \leq t < \left(\frac{2k + 1}{2}\right) T$$

wobei g zunächst an der y–Achse gespiegelt wird:

$$g(t) := g(-t), \quad -\frac{T}{2} \leq t < 0$$

3) **Ungerade Fortsetzung:** Wie bei 2), aber Spiegelung am Ursprung:

$$g(t) := -g(-t), \quad -\frac{T}{2} \leq t < 0$$

Definition:

1) Eine Reihe der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ heißt **Fourier–Reihe** (oder **trigonometrische Reihe**); dabei sei $\omega = \frac{2\pi}{T} > 0$.

2) Die zugehörigen Partialsummen

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

heißen **trigonometrische Polynome**.

Komplexe Schreibweise der Fourier–Reihe:

Formel von Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \\ \sin x &= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \end{aligned}$$

Trigonometrische Polynome:

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

Fourier–Reihe:

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

Umrechnung der Koeffizienten a_k, b_k und γ_k:

$$\begin{aligned}
f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k}{2}\left(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}\right) + \frac{b_k}{2i}\left(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}\right)\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t}\right] \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} a_0 \quad \gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \quad \gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

$$a_0 = 2\gamma_0 \quad a_k = \gamma_k + \gamma_{-k} \qquad b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k})$$

Satz:

1) Die Funktionen $e^{ik\omega t}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, bilden ein Orthonormalsystem bezüglich des Skalarprodukts:

$$\langle u, v \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t)\, dt$$

2) Konvergiert die Fourier–Reihe

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

auf $[0, T]$ **gleichmäßig** gegen eine Funktion $f(t)$, so ist diese stetig und es gilt:

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Bemerkung:

1) Reelle Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(l\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \; k \neq l \\ T/2 & : \; k = l \neq 0 \\ T & : \; k = l = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(l\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \; k \neq l \\ T/2 & : \; k = l \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(l\omega t)\,dt = 0$$

Bemerkung:

2) Reelle Fourier–Koeffizienten:

$$a_k = \frac{2}{T} \int\limits_0^T f(t) \cos(k\omega t)\, dt \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int\limits_0^T f(t) \sin(k\omega t)\, dt, \quad k > 0$$

10.2 Fourier–Reihen

Definition:

1) Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt **stückweise stetig** bzw. **stückweise stetig differenzierbar**, falls $f(t)$ bis auf endlich viele Stellen $t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ in $[a,b]$ stetig bzw. stetig differenzierbar ist und in diesen Ausnahmepunkten die einseitigen Grenzwerte vn $f(t)$ und $f'(t)$ existieren.

Definition: (Fortsetzung)

2) Für eine stückweise stetige Funktion $f : [0,T] \to \mathbb{C}$ werden die **Fourier–Koeffizienten von** $f(t)$ definiert durch:

$$\gamma_k := \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)e^{-ik\omega t}\,dt, k \in \mathbb{Z}$$

$$a_k := \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad k \geq 0$$

$$b_k := \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt, \quad k > 0$$

Dabei ist $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz.

Definition: (Fortsetzung)

3) Die mit den obigen Koeffizienten gebildete Reihe

$$F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

heißt die **Fourier–Reihe** von $f(t)$.

Bei der Definition verwendet man die **direkte Fortsetzung** der Funktion $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ zu einer T–periodischen Funktion.

Satz: Sei $f(t)$ eine stückweise stetige, T–periodische Funktion.

$$f(t) \text{ gerade } \Rightarrow a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t)\, dt \quad \wedge \quad b_k = 0$$

$$f(t) \text{ ungerade } \Rightarrow a_k = 0 \quad \wedge \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\, dt$$

Beispiel: Die Sägezahnfunktion:

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \ t = 0, t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \ 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Funktion ist ungerade, also gilt (beachte $\omega = 1$):

$$a_k = 0 \quad \wedge \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2} \sin(kt)\, dt = \frac{1}{k}$$

Damit lautet die Fourier–Reihe:

$$S(t) \sim \sin t + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \ldots$$

Approximation der Sägezahnfunktion durch 10. Partialsumme

$$S_{10}(t) = \sum_{k=1}^{10} \frac{\sin(kt)}{k}$$

Beispiel: Die Rechteckschwingung:

$$R(t) := \begin{cases} 0 & : \ t = 0, t = \pi, t = 2\pi \\ 1 & : \ 0 < t < \pi \\ -1 & : \ \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Funktion ist ungerade, also gilt:

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \\ b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kt)\, dt = \begin{cases} 0 & : \ k \text{ gerade} \\ \dfrac{4}{k\pi} & : \ k \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Fourier–Reihe lautet daher:

$$R(t) \sim \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots \right)$$

Beispiel: Sei $f(t) = t^2$, $-\pi < t < \pi$ mit 2π–periodischer Fortsetzung.

Die Funktion ist gerade, damit folgt

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos(kt)\, dt = \begin{cases} \dfrac{2\pi^2}{3} & : \quad k = 0 \\ (-1)^k \dfrac{4}{k^2} & : \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Damit ergibt sich als Fourier–Reihe

$$f(t) \sim \frac{\pi^2}{3} - \frac{4 \cos t}{1^2} + \frac{4 \cos(2t)}{2^2} - + \ldots$$

Rechenregeln für Fourier–Reihen:

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, T–periodisch mit

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}, \qquad g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k e^{ik\omega t}$$

1) **Linearität**

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha\gamma_k + \beta\delta_k) e^{ik\omega t}$$

2) **Konjugation**

$$\overline{f(t)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_{-k} e^{ik\omega t}$$

3) **Zeitumkehr**

$$f(-t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{-k} e^{ik\omega t}$$

Rechenregeln für Fourier–Reihen: (Fortsetzung)

4) **Streckung**

$$f(ct) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik(c\omega)t}$$

5) **Verschiebung**

$$f(t+a) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\gamma_k e^{ik\omega a}\right) e^{ik\omega t}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$e^{in\omega t} f(t) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{k-n} e^{ik\omega t}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Rechenregeln für Fourier–Reihen: (Fortsetzung)

6) **Ableitung**

Ist $f(t)$ stetig und stückweise differenzierbar, so gilt:

$$
\begin{aligned}
f'(t) &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik\omega\gamma_k)e^{ik\omega t} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \omega k(b_k \cos(k\omega t) - a_k \sin(k\omega t))
\end{aligned}
$$

7) **Integration**

Gilt $a_0 = \gamma_0 = \int_0^T f(t)dt = 0$, so folgt:

$$
\int_0^t f(\tau)\,d\tau \sim -\frac{1}{T}\int_0^T t f(t)\,dt - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{b_k}{k\omega}\cos(k\omega t) - \frac{a_k}{k\omega}\sin(k\omega t)\right)
$$

Satz: (Konvergenzsatz)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T–periodisch, stückweise stetig differenzierbar.
Betrachte die zugehörige Fourier–Reihe

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right)$$

1) Die Reihe konvergiert punktweise und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F_f(t) = \frac{1}{2}\Big(f(t^+) + f(t^-)\Big)$$

2) In allen kompakten Intervallen $[a, b]$, in denen $f(t)$ stetig ist, ist die Konvergenz gleichmäßig.

Bemerkung:

Stetigkeit von $f(t)$ reicht für die Konvergenz der Fourier–Reihe nicht aus.

Beispiel: Die Sägezahnfunktion

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \ t = 0, t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \ 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Fehlerfunktion: Definiere für $0 < t < 2\pi$

$$R_n(t) := \frac{1}{2}(t - \pi) + \sin t + \frac{\sin(2t)}{2} + \ldots + \frac{\sin(nt)}{n}$$

Es gilt:

$$1 + 2\cos t + \ldots + 2\cos(nt) = \frac{\sin\left[(n + \frac{1}{2})t\right]}{\sin(t/2)}$$

Integration:

$$\int_{\pi}^{t} \frac{\sin\left[(n + \frac{1}{2})t\right]}{\sin(t/2)}\, dt = (t - \pi) + 2\sin t + 2\frac{\sin(2t)}{2} + \ldots + 2\frac{\sin(nt)}{n}$$

Daraus folgt:

$$R_n(t) \quad = \quad \int\limits_{\pi}^{t} \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{2\sin(t/2)}\,dt$$

$$\stackrel{\text{p.I.}}{=} \quad \frac{-\cos\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{(2n+1)\sin(t/2)} + \frac{1}{2n+1}\int\limits_{\pi}^{t} \cos\left((n+\frac{1}{2})\tau\right)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\sin(\tau/2)}\right.$$

$$\stackrel{\text{MWS}}{=} \quad \frac{-\cos\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{(2n+1)\sin(t/2)} + \frac{\cos\left[(n+\frac{1}{2})\bar{t}\right]}{(2n+1)}\left(\frac{1}{\sin(t/2)} - 1\right)$$

und daher

$$|R_n(t)| \leq \frac{2}{(2n+1)\sin(t/2)}$$

Ist $t \in (0, 2\pi)$ fest, so gilt:

$$|R_n(t)| \to 0 \qquad t \to \infty$$

Satz: (Approximationsgüte)

1) **Approximation im quadratischen Mittel**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine T–periodische, stückweise stetige Funktion, und seien

$$S_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right)$$

die Partialsummen der zugehörigen Fourier–Reihen.
Für den Teilraum von $C(\mathbb{R})$ der trigonometrischen Polynome

$$T_n := \text{Spann } \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega t), \ldots, \cos(n\omega t), \sin(\omega t), \ldots, \sin(n\omega t)\right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T \overline{u(t)} v(t)\, dt$$

Satz: (Fortsetzung)

1) gilt dann

$$\forall\, \phi \in T_n \;:\; \|f - S_n\| \leq \|f - \phi\|$$

d.h. $S_n(t)$ ist von allen Funktionen aus dem Teilraum T_n die beste Approximation von $f(t)$ im quadratischen Mittel.

2) Es gilt die **Besselsche Ungleichung**

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \leq \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2\, dt$$

Hieraus folgt insbesondere die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$$

Satz: (Fortsetzung)

2) und damit auch (**Riemannsches Lemma**)

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} |b_k|$$

Bemerkung:

Unter geeigneten Bedingungen an $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ lassen sich die Koeffizienten γ_k der Fourier–Reihe abschätzen:

$$|\gamma_k| \leq \frac{C}{k^{m+1}}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Beispiel: Rechteckschwingung

$$F_f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \ldots\right)$$

Die Koeffizienten γ_k konvergieren mit $1/k$ gegen Null!

Bemerkung: Für $n \to \infty$ geht die Besselsche Ungleichung in Gleichheit über, i.e.

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) = \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt$$

Diese Beziehung nennt man die **Parsevalsche Gleichung**.

Beispiel: Wieder Rechteckschwingung
Es gilt

$$\frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt = 2$$

und da $a_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 = \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots \right) = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 2$$

10.3 Numerische Berechnung der Fourier–Koeffizienten

Numerische Quadratur

Kapitel 11: Numerische Quadratur

Zu berechnen sei ein bestimmtes Integral

$$I = I[f] = \int_a^b f(x)\,dx$$

Berechnung über Stammfunktion nicht möglich: Fehlerfunktion

Numerische Quadratur

$$I_n[f] = \sum_{i=0}^{n} g_i f(x_i) \qquad \textbf{Quadraturformel}$$

1) **Knoten**

$$x_i \in [a,b], \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

2) **Gewichte**

$$g_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

11.1 Newton–Cotes Formeln

Interpolationspolynom für $x_i \in [a, b], \quad i = 0, 1, \ldots, n$ und integriere

$$I_n[f] \;=\; \int_a^b p_n(x)\, dx$$

$$p_n(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i), \quad l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Quadraturformel

$$I_n[f] = \int_a^b p_n(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} g_i f(x_i)$$

mit Gewichten

$$g_i = \int_a^b l_i(x)\, dx$$

Trapezregel:

Wähle $n = 1$, $x_0 = a$ und $x_1 = b$. Damit gilt

$$p_1(x) = \frac{x-b}{a-b} \cdot f(a) + \frac{x-a}{b-a} \cdot f(b)$$

Berechne die beiden Gewichte g_0 und g_1:

$$\begin{aligned} g_0 &= \int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,dx = \frac{b-a}{2} \\ g_1 &= \int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,dx = \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

Daraus folgt die **Trapezregel**:

$$I[f] \approx I_1[f] = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Simpsonregel:

Wähle $n = 2$, $x_0 = a$, $x_1 = \dfrac{b+a}{2}$ und $x_2 = b$. Damit berechnet man die Gewichte

$$\begin{aligned} g_0 &= \int_a^b l_0(x)\,dx = \frac{b-a}{6} \\ g_1 &= \int_a^b l_1(x)\,dx = \frac{2}{3}(b-a) \\ g_2 &= \int_a^b l_2(x)\,dx = \frac{b-a}{6} \end{aligned}$$

Daraus folgt die **Simpsonregel**:

$$I[f] \approx I_2[f] = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right)$$

3/8–Regel:

$$I_3[f] = \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + 2\frac{(b-a)}{3}\right) + f(b)\right)$$

Milne–Regel:

$$\begin{aligned} I_4[f] \;&=\; \frac{b-a}{90}\left(7f(a) + 32f\left(a + \frac{b-a}{4}\right) + 12f\left(a + 2\frac{b-a}{4}\right)\right. \\ &\left. + 32f\left(a + 3\frac{(b-a)}{4}\right) + 7f(b)\right) \end{aligned}$$

Satz:

Die Newton–Cotes–Formel $I_n[f]$ integriert Polynome vom Grad $\leq n$ exakt.

Zusammengesetzte Newton–Cotes–Formeln:

Höhere Genauigkeit durch Unterteilung des Intervalls $[a, b]$

Gegeben sei die äquidistante Unterteilung mit den Knoten

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad h = \frac{b-a}{N}$$

Verwende auf jedem Teilintervall Quadraturformel der Ordnung n.

Beispiel: Zusammengesetzte Trapezregel

$$\begin{aligned} T(h) &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \\ &= h\left(\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \ldots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2}\right) \end{aligned}$$

Beispiel: Zusammengesetzte Simpsonregel

$$
\begin{aligned}
S(h) &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{6}\left(f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1})\right) \\
&= \frac{h}{6}\,(f(a) + 4f(a + h/2) + 2f(a + h) + \ldots \\
&\qquad +2f(b - h) + 4f(b - h/2) + f(b))
\end{aligned}
$$

Quadraturfehler der (zunächst einfachen) Newton–Cotes Formeln:

Abschätzung für den Interpolationsfehler:

$$
|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|
$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b (f(x) - p_n(x))\, dx \right| &\leq \int_a^b |f(x) - p_n(x)|\, dx \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \int_a^b \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| dx
\end{aligned}$$

Beispiel: Trapezregel

$$\int_a^b \left| \prod_{i=0}^{1} (x - x_i) \right| dx = \int_a^b (x-a)(b-x)\, dx = \frac{(b-a)^3}{6}$$

Wir erhalten also:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - I_1[f] \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(2)}(\xi)|$$

Tabelle der Integrationsfehler:

Trapezregel:	$\dfrac{(b-a)^3}{12} \cdot \|f^{(2)}\|_\infty$
Simpsonregel:	$\dfrac{(b-a)^5}{2880} \cdot \|f^{(4)}\|_\infty$
3/8–Regel:	$\dfrac{(b-a)^5}{6480} \cdot \|f^{(4)}\|_\infty$
Milneregel:	$\dfrac{(b-a)^7}{967680} \cdot \|f^{(6)}\|_\infty$

Bemerkung:

Man beachte die **vergleichsweise** höhere Genauigkeit der Simpson– und Milneregel (n gerade!):

$$n = 1 \,:\, (b-a)^3,\; n = 2 \,:\, (b-a)^{4\to 5}, n = 3 \,:\, (b-a)^5,\; n = 4 \,:\, (b-a)^{6\to 7}$$

Fehlerabschätzungen bei zusammengesetzten Newton–Cotes Formeln

Beispiel: Zusammengesetzte Trapezregel

Es gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T(h) \right| \le \frac{h^2}{12}(b-a)\|f^{(2)}\|_\infty$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\,dx - T(h) \right| &= \left| \sum_j^{n-1} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx - I_1^j[f] \right) \right| \\
&\le \sum_j^{n-1} \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx - I_1^j[f] \right|
\end{aligned}$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\,dx - T(h) \right| &= \left| \sum_j^{n-1} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx - I_1^j[f] \right) \right| \\
&\leq \sum_j^{n-1} \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx - I_1^j[f] \right| \\
&\leq \sum_j^{n-1} \frac{(x_{j+1} - x_j}{12} \, \|f^{(2)}\|_\infty \\
&\leq \frac{n}{12} h^3 \, \|f^{(2)}\|_\infty \\
&= \frac{h^2}{12}(b-a) \, \|f^{(2)}\|_\infty
\end{aligned}
$$

Beispiel: Zusammengesetzte Simpsonregel

Es gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S(h) \right| \le \frac{h^4}{2880}(b-a)\|f^{(4)}\|_\infty$$

Satz: (Konvergenz)

Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei hinreichend oft stetig differenzierbar. Dann konvergieren die

zusammengesetzten Newton–Cotes Formeln

im Grenzwert $h \to 0$ gegen das Integral

$$I[f] = \int_a^b f(x)\,dx$$

11.2 Gauß–Quadratur

Approximiere Integrale der Form

$$I[f] = \int_a^b w(x) f(x)\, dx$$

durch die Quadratur

$$I[f] \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

mit einer speziellen Wahl von Stützstellen x_i.

Gaußsche Quadraturformeln mit

$(n+1)$ Punkten

integrieren Polynome vom Grad $2n+1$ exakt

11.3 Extrapolation

Berechne Quadratur mittels Trapezregel

$$I[f] \approx T[h_i]$$

für verschiedene h_i, $i = 1, \ldots, k$ und interpoliere die Funktion

$$g(y) := T[y]$$

an den Stützstellen $y_i = h_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Extrapolation:

Werte das Interpolationspolynom an der Stelle $y = 0$ aus