Hinweis: Alle Integrale sind elementar zu berechnen. Stammfunktionen aus Formelsammlungen etc. dürfen nicht verwendet werden.

Aufgabe 1)

a) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der bei Drehung des Funktionsgraphen von

$$f\ :\ [0,\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{\sin(x)}\,\cos^2(x)$$

um die x-Achse entsteht.

b) Gegeben seien die Kurve

$$c : [0,\,\ln(2)] \to \mathbb{R}^2, \qquad c : t \longmapsto e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

und die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln(x^2 + y^2)\right).$$

(i) Berechnen Sie die Länge der Kurve c.

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs c.

Aufgabe 2)

a) Gegeben sind folgende Daten der Funktion $f(x) = x\cos(2x)$.

x_k	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$f(x_k)$	0	$\frac{\pi}{12}$	0

(i) Berechnen Sie das zugehörige Interpolationspolynom p_2 zweiten Grades zu den obigen Interpolationsdaten.

(ii) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion f, und zeigen Sie, dass folgende Abschätzung für den Interpolationsfehler im Punkt $x = \frac{\pi}{12}$ gilt:

$$\left| p_2\left(\frac{\pi}{12}\right) - f\left(\frac{\pi}{12}\right) \right| < \frac{1}{3}.$$

b) Berechnen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f(x) = \frac{e^{2x} - x - 1}{x}$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Viel Erfolg!