Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2011**
Prof. Dr. J.Struckmeier
Dr. K. Rothe

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 5:

Man untersuche die Funktionenfolgen

a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{2 + x^{2n}}\,,$

b) $g_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}\,, \qquad g_n(x) = \dfrac{n}{n + 1 + nx^2}\,,$

c) $h_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}\,, \qquad h_n(x) = \cos^n x$

auf Konvergenz und unterscheide gegebenenfalls punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 6:

a) Man bestimme für folgende Funktionenreihen den maximalen Konvergenzbereich und untersuche welche Art von Konvergenz (punktweise, gleichmäßige) vorliegt.

$$\text{(i)} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt{x})^k}\,, \qquad \text{(ii)} \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}\,.$$

b) Man zeige, dass für $x \in]0, \infty[$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x + k)(x + k + 1)}$$

gleichmäßig gegen $h(x) = \dfrac{1}{x}$ konvergiert.

Aufgabe 7: (aus dem Vordiplom Analysis II, SS00+SS05)

a) Für folgende Potenzreihen bestimme man den Entwicklungspunkt und berechne den Konvergenzradius:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{5} \right)^2 x \right)^{2n} \quad , \quad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+4} \, x^n \; .$$

b) Man bestimme den Entwicklungspunkt, den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{5^n (n+2) \sqrt{n+3}}$$

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls (mit Begründung).

Aufgabe 8:

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{2}{3x+4}$ definierte Funktion.

a) Man zeichne die Funktion f .

b) Man beweise über vollständige Induktion, dass für $k \geq 0$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k 2 \cdot 3^k \cdot k!}{(3x+4)^{k+1}} \; .$$

c) Man berechne die Taylorreihe von f allgemein zum Entwicklungspunkt $x_0 \neq -4/3$ und bestimme den Konvergenzradius.

d) Welche Konvergenzintervalle ergeben sich für $x_0 = \pm 1$? Liegt Konvergenz in den Randpunkten vor?

Abgabetermin: 26.4. - 29.4. (zu Beginn der Übung)