

## Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 7

#### Aufgabe 25:

Gegeben sei die Funktion  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 1 - x^2$ .

- Man skizziere die 2-periodische direkte Fortsetzung der Funktion  $f$ .
- Man berechne die Fourier-Reihe dieser 2-periodischen Fortsetzung von  $f$ .
- Man zeichne die Partialsummen  $S_1(x), \dots, S_8(x)$  der berechneten Fourierreihe.

d) Man zeige mit Hilfe von b) die Identität 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

#### Aufgabe 26:

Gegeben sei die  $2\pi$ -periodische direkte Fortsetzung der Funktion  $f$  mit

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & , \quad -\pi \leq x \leq 0 \\ 0 & , \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

- Man zeichne die direkte Fortsetzung im Intervall  $[-\pi, 4\pi]$ .
- Man berechne die zugehörige Fourier-Reihe.
- Man zeichne die Partialsummen  $S_0(x), \dots, S_3(x)$  der berechneten Fourierreihe.
- Mit Hilfe von b) zeige man die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}.$$

**Aufgabe 27:**

Gegeben sei die Funktion  $f : [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = e^x$ .

- a) Man zeichne die ungerade (2-periodische) Fortsetzung der Funktion  $f$  im Intervall  $[-2, 2]$ .
- b) Man berechne die komplexe Fourier-Reihe dieser ungeraden Fortsetzung.
- c) Man gebe die reellen Fourier-Koeffizienten der Reihe aus b) an und
- d) Man zeichne  $f$ , sowie die Partialsummen  $S_{2m-1}(x)$  für  $m = 1, \dots, 7$  der berechneten Fourier-Reihe im Intervall  $[-1, 1]$ .

**Aufgabe 28:**

- a) Man bestimme mit Hilfe des Fourierreihenansatzes

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

eine Lösung der Differentialgleichung  $y'(x) = 4y(x) + 11 \cos(3x) + 2 \sin(3x)$ .

- b) Man bestimme die Fourier-Koeffizienten der folgenden  $2\pi$ -periodischen Funktionen:
  - (i)  $3 - 4 \sin(2x) + 7 \sin(5x) + 6 \cos(3x)$ ,
  - (ii)  $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x$ .

**Abgabetermin:** 11.7. - 14.7. (zu Beginn der Übung)